§. 37. Auf die Lehre von den Proportionen gründen sich mehrere praktische Rechenarten, welche in den Schulrechenbüchern verschiedene Namen führen. Wir haben vorhin die Verhältnisse sowol, als auch die Proportionen eingetheilt, 1) in einfache und 2) in zusammengesetzte. In beiden unterscheiden wir a) Verhältnisse, in welchen die Glieder gerade aufeinander wirken oder gerade Verhältnisse; b) Verhältnisse, in welchen die Glieder umgekehrt auf einander wirken oder umgekehrte Verhältnisse. Aus diesen Verhältnissen in reinen Zahlen ergeben sich mehrere Rechnungsarten in angewandten Zahlen, zwischen welchen aber kein wesentlicher Unterschied Statt findet. Es kann also eigentlich auch nur zwei Rechnungsarten geben, welche aus den Proportionen hergeleitet werden, nämlich: 1) angewandte einfache Proportionsrechnung oder einfache Regel de tri und 2) angewandte zusammengesetzte. Jene lehrt zu drei, diese aber zu mehr als drei gegebenen proportionirten Größen eine unbekannte finden. Wenn man in manchen Rechenbüchern besondere Abschnitte findet über: Holzrechnung, Häuserberechnung, Talg- und Lichtrechnung, Weinrechnung, Viehrechnung u. s. w., so ist dieß nicht allein unnöthig, sondern auch unzweckmäßig, indem nicht abzusehen ist, wo man mit solchen Eintheilungen enden soll. Wir können dann eben so gut eine Kaffee- und Zuckerrechnung, Schuh- und Strümpferechnung u. s. w. anführen und jedem Gegenstande unserer Lebensbedürfnisse ein eigenes Rechenkapitel widmen. Dennoch würde es nicht gerathen sein, in den Rechenbüchern bloß obige Eintheilungen von zwei angewandten Rechnungsarten anzunehmen und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Abschnitte würden dem Schüler zu lang vorkommen, und ihm die Lust zum Rechnen benehmen. Das Kind liebt die Abwechselung; das Neue reizt und ermuntert dasselbe zur fröhlichen Thätigkeit. Ein langes Einerlei ermüdet, macht unmuthig und mißmuthig. Daher ist es pädagogisch (oder vielmehr psychologisch) richtig, wenn der Lehrer absichtlich im Unterricht kleine Abschnitte, kleine Ganze macht. Das Kind macht sich solche selbst. Oft hab ich es gehört, daß sich ein Kind über seinen Standpunkt und seine Fortschritte im Rechnen gegen Andere in seiner Weise äußerte: ich addire mit 6, 7 oder 8 Reihen, ich subtrahire von Nullen, ich multiplicire oder dividire mit zwei, drei oder vier Zahlen, ich kann schon den allgemeinen Nenner finden u. s. w. Wenn daher die Abtheilungen im Rechenbuche zu lang sind, so daß das Kind Monate lang in demselben Abschnitte arbeiten muß, und zu Hause seine Fortschritte im Rechnen oder sein Weiterrücken im Rechenbuche nicht nach neuen Rechnungsarten angeben kann, so wird die Lust zum Rechnen, welche sich anfänglich bei ihm fand, nach und nach erkalten und nun den nachtheiligsten Einfluß auf sein Fortschreiten äußern. Kann aber das Kind oft einen neuen Abschnitt angeben, eine neue Stufe ersteigen, so nimmt die Liebe zum Rechnen zu, wird manchem Kinde zur Liebhaberei, und dann ist Alles gewonnen. So ist es bei Kindern; ist es bei Erwachsenen viel anders?

2. Manche von den, in unsern Rechenbüchern angeführten Rech-

image
not
available

Fünfter Abschnitt.

Die Regel de tri oder der Dreisatz.

§. 39. Vorbemerkung.

Wenn die Schüler in den vorigen Abschnitten gehörig geübt worden sind, und alles recht verstanden haben, so gehe man nun zu den Aufgaben der Regel de tri über. Der Lehrer mache gleich darauf aufmerksam, daß diese Rechnungsart deshalb so genannt werde, weil alle zu ihr gehörige Aufgaben aus drei gegebenen Gliedern bestehen, zu welchen vermittelst der Proportionsrechnung das unbekannte vierte Glied gesucht werden soll. Jede Aufgabe der Regel de tri zerfällt überdieß in zwei Theile, in das Gegebene, Bekannte, und in das zu Suchende, Unbekannte, oder in das Bedingende und in die Frage. Kommen weiterhin sehr zusammengesetzte Aufgaben der Regel de tri vor, so zeige er, daß diese aus mehreren Dreisätzen bestehen und sich in nichts Wesentlichem von einer einfachen Regel de tri-Aufgabe unterscheiden. Die erste und größte Schwierigkeit für den Schüler ist nun der Ansatz oder Aufsatz. Ehe der Lehrer noch zur wirklichen Berechnung der Aufgaben übergeht, übe er vorher die Schüler im richtigen Ansatz und gebe zu dem Ende eine Menge Aufgaben zur Uebung, zuerst von zunehmenden, dann von abnehmenden Verhältnissen. Es gibt aber zwei Wege zur Bildung des richtigen Ansatzes einer Regel de tri-Aufgabe. Entweder sucht man zuerst die richtige Stellung des ersten Verhältnisses, nach welcher die Glieder des zweiten Verhältnisses sich ohne alle Schwierigkeit ordnen lassen; oder man stellt das letzte Verhältniß zuerst, und ordnet darnach die Glieder des ersten Verhältnisses naturgemäß an. Beide Wege kommen im Wesentlichen überein. Der Schüler lerne anfänglich nur einen kennen, und wenn er hierauf sicher geht, kann er auch den andern einschlagen. Für den ganzen Unterricht aber merke sich der Lehrer die Regel: „Nur eins auf einmal" und verbinde damit die nicht minder wichtige: „Im Fortschreiten vergiß nicht das Vorhergegangene wieder in Anwendung zu bringen." Wer beim Beginn einer neuen Rechenübung dem Anfänger den Grund des Verfahrens weitläufig demonstrirt, zugleich die verschiedenen Kunstgriffe und Vortheile zeigt, durch welche man zu demselben Resultate gelangen kann, und endlich noch auf die mannigfaltige Anwendung auf wirkliche Vorfälle im Leben glaubt hinweisen zu müssen, der verwirrt den Schüler; und wer stets zum Neuen eilt, ohne das bereits Eingeübte und Erlernte zu wiederholen, der verliert mehr als er gewinnt. —

Vorher haben die Schüler schon gelernt, daß nur Dinge gleicher Art in Verhältniß können gestellt werden; daher wird die Zusammenstellung der Glieder keine Schwierigkeit finden, wohl aber die Anordnung derselben, welches als erstes und welches als zweites Glied zu setzen ist. Hier thut nun der Lehrer wohl, leichte Aufgaben zu wählen, diese vorher mündlich lösen zu lassen, dann beim schriftlichen Rechnen, wenn er etwa den ersten der oben genannten Wege wählt, gleich zu fragen: Was soll in dieser Aufgabe gerechnet werden? Ferner: Wel-

ches ist das zu diesem gehörige gleichartige Glied? wird für jenes Glied (Frageglied) mehr oder weniger erfordert, als für dieses ist angegeben worden? Davon hängt es nun ab, ob die beiden ersten Glieder in zunehmendem oder abnehmendem Verhältnisse stehen müssen. Ist das erste Verhältniß richtig gestellt, so hat das dritte keine Schwierigkeit, das unbekannte vierte Glied nenne der Lehrer x.

1. Beispiel. 2 Pfund Kirschen kosten 4 Sgr., wie viel werden 6 Pfund kosten?

Mündlich.

Wie viel kosten 2 Pfd. Kirschen? (4 Sgr.) Wie viel mal 2 Pfd. sind gekauft worden? (3mal 2 Pfd.) Wie oftmal werde ich daher 4 Sgr. bezahlen müssen? 3mal 4 Sgr. = 12 Sgr.

Schriftlich.

Was soll gerechnet werden? Antw. Wie viel 6 Pfd. Kirschen kosten. Von wie vielen Pfunden ist der Preis angegeben? Antw. Von 2 Pfd. Wie müssen aber die Glieder zusammengesetzt werden, wenn nothwendig mehr kommen muß, zunehmend oder abnehmend? Antw. Zunehmend. Bilde aus den gegebenen Pfunden ein zunehmendes! 2 Pfd. : 6 Pfd. Das unbekannte Glied x gehört, wie wir früher gesehen, in die vierte Stelle; wohin werden nun die 4 Sgr. zu stehen kommen? Antw. In die dritte Stelle. Nun sage mir die ganze Proportion!

2 Pfd. : 6 Pfd. = 4 Sgr. : x

2. Beispiel. 6 Pfund Zucker kosten 3 Thlr.; wie viel wird man für 2 Pfd. bezahlen müssen? — Was soll hier gerechnet werden? Antw. Wie viel 2 Pfd. kosten. Von wie vielen Pfunden ist der Preis angegeben? Antw. Von 6 Pfd. — Werden 2 Pfd. mehr oder weniger als 6 Pfd. kosten? Antw. Weniger. Was für ein Verhältniß mußt du deshalb bilden? Antw. Ein abnehmendes. Wie heißt dieß? Antw. 6 zu 2. Vollende nun die Proportion. 6 Pfd. : 2 Pfd. = 3 Thlr. : x.

Zieht der Lehrer den zweiten Weg vor, so fragt er bei dem ersten Beispiele: Was soll hier gerechnet werden? Antw. Wie viel 6 Pfd. kosten. Da wir dieß noch nicht wissen, so nennen wir diese unbekannte Anzahl Sgr. x und sagen: 6 Pfd. kosten x Sgr. Welches von den drei gegebenen Gliedern ist mit x gleichartig? Antw. 4 Sgr. Daher werden diese beiden auch ein Verhältniß bilden: 4 Sgr. : x Sgr. Welche Glieder bilden nun das andere Verhältniß? Antw. 6 Pfd. und 2 Pfd. Wie sollen wir aber dieß Verhältniß bilden, zunehmend 2 : 6 oder abnehmend 6 : 2? Antw. — Du hast eben gesagt, wir wollten 2 Pfd. berechnen, werden diese denn mehr oder weniger als 6 Pfd. kosten? Antw. Mehr. Wird dieß durch Abnahme oder Zunahme, durch ein steigendes oder fallendes Verhältniß hervorgebracht? Antw. Durch ein steigendes. Gib dieß an. 2 : 6. Es ist allgemein Gebrauch, das Verhältniß, welches die unbekannte Größe x enthält, zuletzt zu setzen. Kannst du nun die Proportion angeben? Antw. 2 Pfd. :

image
not
available

satz. Jener wie dieser wird durch drei Zahl-Satzglieder bestimmt; oder hört etwa der Dreisatz damit auf ein solcher zu sein, wenn das dritte Glied seine Stelle wechselt? Bedarf es zur Auflösung einer Rechenaufgabe nach dem Zweisatz vielleicht weniger Ueberlegung als nach dem Dreisatz? Oder liegt etwa bei jener in der Rechenoperation eine Erleichterung, eine Abkürzung? Durchaus nicht, beide gestatten gleiche Behandlung. Aber der Ansatz ist vielleicht bequemer und leichter? Eben so wenig; die Natur der Aufgabe ist dieselbe, und erfordert dieselbe Ueberlegung. Ob eine Aufgabe nach der geraden oder umgekehrten Regel de tri zu lösen ist, oder ob ich nach dem Zweisatz mit der dritten Zahl (drittem Gliede?) multipliciren oder dividiren muß, erfordert dieselbe Erwägung. Also hätten wir durch die arithmetischen Verhandlungen der neuesten Zeit für die Methodik nichts gewonnen? Allerdings, und das nicht wenig. Was hie und da einzelne Lehrer theils wie vom Instinkt getrieben, andere mit voller Ueberzeugung anwendeten; — ein Verfahren, welches das ganze ununterrichtete Volk allgemein übte — das beginnt endlich allgemein in der Methodik als naturgemäß, folglich als wahr und zweckmäßig anerkannt zu werden. Und worin besteht dieß? Darin, daß man wenigstens in den untern und mittleren Klassen der Elementarschulen, desgleichen in den Mädchenschulen überhaupt, bei der Berechnung von Regel de tri-Aufgaben die gegebene Bedingung oder das bekannte Verhältniß auf die Einheit reducirt, oder mit andern Worten, das gegebene Verhältniß auf ein Stammverhältniß zurückführt, wenn es nicht schon als ein solches in der Aufgabe erscheint. Auf diese Weise wird es dann am ersten klar, ob man das dritte Glied mit dem erhaltenen Quotienten multipliciren oder dividiren muß. Z. B. a) $^2/_3$ Pfund kosten $^4/_5$ Thlr., wie viel kosten $^7/_8$ Pfund? (S. Rheinische Blätter 19. B. der neuen Folge, 3. Heft.)

Auflösung.

Es muß gesucht werden, wie viel 1 Pfund kostet.

$^2/_3$ Pfund kosten $^4/_5$ Thlr.
$^1/_3$ „ „ $^2/_5$ „
$^3/_3$ od. 1 Pfd. „ $^6/_5$ „
$^7/_8$ Pfd. kosten $^7/_8$ mal $^6/_5$ Thlr. $= {}^{42}/_{40} = 1^1/_{20}$ Thlr.

b) Ein anderes Beispiel. 5 Arbeiter machen eine Arbeit in 4 Tagen fertig; wie bald kommen 3 Arbeiter damit zu Stande? (S. eben daselbst.)

Auflösung.

Wenn 5 Arbeiter eine bestimmte Arbeit in 4 Tagen vollenden, so wird 1 Arbeiter in 5mal 4 Tagen damit zu Stande kommen, also 5mal 4 Tage = 20 Tage. Ferner: wenn 1 Arbeiter eine Arbeit in 20 Tagen fertig macht, so werden 3 Arbeiter nur ein Drittel dieser Zeit dazu bedürfen, also $^{20}/_3 = 6^2/_3$ Tage. — Dieses Verfahren setzt den Verstand in Thätigkeit, und gibt gründliche Einsicht. Nun laßt uns auch diese beiden Aufgaben nach dem Zweisatz berechnen. (S. Rhein. Blätter a. a. O.)

a) $^2/_3$ Pfd. $^4/_5$ Thlr.
$^7/_8$ „ ? „

$^1/_3$ Pfd. $^4/_{10} = {}^2/_5$ Thlr.
1 „ $3 \times {}^2/_5 = {}^6/_5$ „
$^1/_8$ „ $^1/_8 \times {}^6/_5 = {}^6/_{40}$ „
$^7/_8$ „ $7 \times {}^6/_{40} = {}^{42}/_{40} = 1^1/_{20}$ Thlr.

b) 5 Arb. 4 Tage
3 „ ? „

1 Arb. $5 \times 4 = 20$ Tage
3 „ $^{20}/_3 = 6^2/_3$ Tage.

Nun sage man uns: Was haben wir hier mit dem Zweisatze gewonnen? Wenn der Schüler fragt: Warum müssen bei b die 20 Tage durch 3 dividirt werden, da doch bei a $^6/_{40}$ mit 7 multiplicirt wird: so kann sein Verstand doch schwerlich anders befriedigt werden, als auf die vorhergehende Weise. Der Zweisatz gibt nichts wesentlich Neues; das Zurückführen auf die Einheit ist wahrscheinlich so alt als die Rechenkunst; beim Kopfrechnen hat der verständige Lehrer immer so verfahren. Wenn die Anhänger des Zweisatzes nichts weiter wollen, als diese Weise bei dem früheren Elementarunterricht im Rechnen geltend zu machen, so bin ich mit ihnen einverstanden. Schon in der ersten Auflage unseres metho-

image
not
available

Schriftlich. Wenn 15 Ellen 4 Thl. kosten, so kosten 45 Ellen x Thl. Wir haben demnach das Verhältniß 4 Thl. : x. Da 45 Ellen natürlicher Weise mehr kosten werden als 15 Ellen, und hier die Ellen mit dem Preise im geraden Verhältniß stehen, so muß das Verhältniß auch zunehmend sein, also 15 Ellen : 45 Ellen = 4 Thl. : x Thl. $15 x = 4 \times 45$; $15 x = 180$ Thl.; $x = {}^{180}/_{15} = 12$ Thl.

2) 5 Ellen Band wurden mit $12\frac{1}{2}$ Sgr. bezahlt; wie viel werden 2 Ellen kosten? Antw. 5 Sgr.

Aufl. Mündlich. Wenn 5 Ellen $12\frac{1}{2}$ Sgr. kosten, so werden 10 Ellen 25 Sgr. kosten; 2 Ellen = $^1/_5$ von 10 Ellen; daher kosten 2 Ellen auch $^1/_5 \times 25$ Sgr. = 5 Sgr.

Schriftlich. 2 Ellen kosten x Sgr. $12\frac{1}{2}$ Sgr. sind mit x gleichartig, werden also in ein Verhältniß zu stehen kommen. $12\frac{1}{2}$ Sgr. : x Sgr. Waare und Preis wirken gerade auf einander. 2 Ellen kosten weniger als 5 Ellen, daher müssen diese in ein abnehmendes Verhältniß gestellt werden. Die Proportion heißt also: 5 Ellen : 2 Ellen = $12\frac{1}{2}$ Sgr. : x; $5 x = 2 \times 12\frac{1}{2}$; $5 x = 25$ Sgr.; $x = {}^{25}/_5 = 5$ Sgr.

3) 3 Pfund Kaffee kosten $22\frac{1}{2}$ Sgr.; wie viel muß man für 100 Pfund bezahlen?

Aufl. Mündlich. Wenn 3 Pfd. $22\frac{1}{2}$ Sgr. kosten, so wird 1 Pfd. den dritten Theil von $22\frac{1}{2}$ Sgr. kosten, also $\frac{22\frac{1}{2}}{3} = {}^{45}/_6 = 7\frac{3}{6} = 7\frac{1}{2}$ Sgr. Wenn aber 1 Pfd. $7\frac{1}{2}$ Sgr. kostet, so werden 100 Pfd. $100 \times 7\frac{1}{2}$ Sgr. = 750 Sgr. kosten. Diese müssen durch 30 in Thl. verwandelt werden. 750 Sgr. = 75 $\times$ 10 Sgr. 75 Sgr. = $2\frac{1}{2}$ Thl. 10×75 Sgr. = $10 \times 2\frac{1}{2}$ Thl. = 25 Thl.

Oder: 1 Pfd. kostet $7\frac{1}{2}$ Sgr. = $^1/_4$ Thl. 100 Pfd. kosten also $100 \times {}^1/_4 = {}^{100}/_4 = 25$ Thl.

Oder: ich nehme an, 1 Pfd. koste $22\frac{1}{2}$ Sgr.; so wird die Antwort die dreifache Summe des Preises von 100 Pfd. enthalten. Dividire ich diese durch 3, so bekomme ich das richtige Resultat. $22\frac{1}{2}$ Sgr. = $^3/_4$ Thl. 100 Pfd. kosten dann $100 \times {}^3/_4$ Thl. = ${}^{300}/_4 = 75$ Thl. Diese durch 3 dividirt = ${}^{75}/_3 = 25$ Thl.

Schriftlich. Es sollen 100 Pfd. Kaffee berechnet werden, diese kosten mehr als 3 Pfd.; daher müssen diese in einem zunehmenden Verhältnisse stehen. 3 Pfd. : 100 Pfd. = $22\frac{1}{2}$ Sgr. : x. Nun sind 3 x = 2250 Sgr. und x = 750 Sgr. Diese durch 30 dividirt, machen 25 Thl.

Anmerkung. Wir halten es für unnöthig, die Auflösung jedesmal so ausführlich anzugeben. Nach diesen Beispielen wird es genügen, hin und wieder die Auflösung kurz anzudeuten.

4) Für $7\frac{1}{2}$ Sgr. kaufte man 2 Brode; wie viel Brode erhält man für 1 Thl.?

Aufl. Mündlich. $7\frac{1}{2}$ Sgr. = $^1/_4$ Thl., 1 Thl. = $^1/_4$ Thl. Daher $4 \times 2 = 8$ Brode.

image
not
available

image
not
available

image
not
available

l. $4 : 18 = 46^2/_3 : x$
$4 : {}^{18}/_3 = 140 : x$
$4 : 6 = 150 : x$
$1 : 6 = 35 : x$
$x = 6 \times 35 = 210$ Thl.

m. $4 : 18 = 46^2/_3 : x$
$4 : 18 = {}^{140}/_3 : x$
$4x = 18 . {}^{140}/_3 :$
$4x = 6 . 140$
$4x = 840$
$x = 210$ Thl.

n. $4 : 18 = 46^2/_3 : x$
$4 : 3.3.2 = 46^2/_3 : x$
$2 : 3.3 = 46^2/_3 : x$
$2 : 3 = 140 : x$
$1 : 3 = 70 : x$
$x = 210$ Thl.

Anmerkung. Ist der Schüler mit den Decimalbrüchen bekannt, so kann man diese Auflösungsarten noch vermehren. Aus der Behandlung dieser Aufgabe kann der Lehrer entnehmen, welche Vortheile und Abkürzungen bei den Auflösungen Statt finden können. Glieder mit gebundenen Zahlen, d. h. mit höhern und niedern Geldsorten, Maßen und Gewichten, werden entweder in die niedrigste gegebene Sorte aufgelöset, oder die niedern Sorten werden in Bruchform auf die höchste gegebene Sorte reducirt.

11) A kauft ein Stück feine Leinwand von $43^1/_2$ Ellen und muß für 3 Ellen 1 Thl. 7 Sgr. 6 Pfg. bezahlen; a) wie viel kostet das ganze Stück? b) wie viel Ellen muß man zusammen nehmen, um zuerst den Preis gerade in ganzen Thalern geben zu können? Antw. a) $18^1/_8$ Thl. oder 18 Thl. $3^1/_4$ Sgr., oder 18 Thl. 3 Sgr. 9 Pfg. b) 12 Ellen zu 5 Thl.

Das zusammengesetzte Glied 1 Thl. 7 Sgr. 6 Pfg. kann der Schüler darstellen 1) in Pfenningen. 1 Thl. = 360 Pfg.; 7 Sgr. = 84 Pfg.; $360 + 84 + 6 = 450$ Pfg. Die Proportion heißt dann: $3 : 43^1/_2 = 450 : x$. Hier erscheint dann das vierte Glied x auch in Pfenningen, welche zuerst durch 12 dividirt in Sgr. und diese durch 30 dividirt in Thl. verwandelt werden. 2) In Silbergroschen. 1 Thl. = 30 Sgr.; 6 Pfg. = $^1/_2$ Sgr.; $30 + 7 + {}^1/_2 = 37^1/_2$ Sgr. $3 : 43^1/_2 = 37^1/_2$ Sgr. : x Sgr., wo x in Sgr. dargestellt wird, welche, durch 30 dividirt, Thaler werden. 3) In Thalern. 6 Pfg. = $^1/_2$ Sgr.; $7^1/_2$ Sgr. = $^1/_4$ Thl. Die Proportion heißt nun: $3 : 43^1/_2 = 1^1/_4 : x$.

Um die Antwort auf die zweite Frage b zu erhalten, stelle man die angegebenen 3 Ellen mit dem in Thalern bezeichneten Preise in ein Verhältniß, also: $3 : 1^1/_4$. Multiplicirt man dieß

image
not
available

Anmerkung. Der Lehrer diktire, etwa am Samstag, solche Rechnungen, und lasse sie von den Schülern zu Hause ausarbeiten, und in Form einer Rechnung schön und sauber zu Papier bringen. Die Eltern sehen solche Arbeit gern, und dieß ist zugleich eins von den Mittelchen, dieselben für den Unterricht zu gewinnen. Manches, was in der Schule vorgenommen wird, verstehen die Eltern nicht zu beurtheilen, und dieß mag wol der Grund sein, warum sich viele so wenig für den Unterricht interessiren. Finden sie aber ihre Kinder zu Hause mit einer Arbeit beschäftigt, die in das wirkliche Leben einschlägt, und von welcher sie den Nutzen aus eigener Erfahrung kennen, so lernen sie daraus den ganzen Unterricht schätzen und den Lehrer lieb gewinnen. Und wol dem Lehrer, welcher von Eltern und Kindern geliebt wird!

13) B erhält 4 Ballen Waare, bezeichnet M, N, O, P. M wiegt $248^3/_4$ Pfd., N $318^2/_3$, O $295^1/_8$, P $328^1/_2$ Pfd.; bezahlt für 100 Pfd. 47 Thl. 20 Sgr. a) Wie viel kostet jeder Ballen? b) Wie viel kosten diese 4 Ballen zusammen? c) Wie theuer ist jedes Pfund? Antw. a) M 118 Thl. $17^1/_8$ Sgr.
N 151 „ $26^1/_2$ „
O 141 „ 1 „
P 156 „ $17^{11}/_{20}$ „
b) 568 „ 2 „ $7^9/_{20}$ Pfg. zhlb.
c) — „ 14 „ 4 „

Der Lehrer vergesse nicht, die Aufgaben so einzurichten, daß die vier Rechnungsarten mit Brüchen wieder in Anwendung kommen. In dem von uns herausgegebenen praktischen Rechenbuche ist hierauf Bedacht genommen worden. Leicht vergißt der Schüler eine Rechenübung, wenn sie in der Reihenfolge der Aufgaben lange nicht mehr vorkommt. — Die Auflösung vorstehender Aufgabe hat an sich keine Schwierigkeit. Die Regeldetrisätze heißen:

$$100 : 248^3/_4 = 47^2/_3 : x$$
$$100 : 318^2/_3 = 47^2/_3 : x \text{ u. s. w.}$$

Die Summe der gefundenen Antworten gibt b; dividirt man $47^2/_3$ Thl. oder 1430 Sgr. durch 100, so erhält man c.

14) Der Bauer A hatte 120 Malter Hafer und 80 Malter Roggen geerntet. Am 5. Januar 1829 verkaufte er $^3/_5$ von seiner ganzen Weizenernte für 99 Thaler. Den 25. Februar verkauft er auch den Rest von 12 Maltern in demselben Preise; wie theuer war 1 Malter Weizen?

Anmerkung. Diese Aufgabe enthält absichtlich manches Ueberflüssige; z. B. die Angabe der Hafer- und Roggenernte und des Datums. Der Schüler soll die Bestimmungen herausheben lernen, durch welche die Lösung der Aufgabe bedingt ist. Enthält nun diese außerwesentliche Umstände, so ist er genöthigt, diese von dem Wesentlichen zu sondern, und eine solche Geistesarbeit ist eben geeignet, die Denkkraft des Schülers in Thätigkeit zu setzen. Der beschränkte und ungeübte Kopf wird leicht durch solche unnöthige Angaben verwirrt, der fähige und geübte Kopf wird sich bald zurecht zu finden, und findet bisweilen ein Vergnügen daran, die versteckten Punkte, von welchen die Auflösung der Aufgabe abhangt, aufzusuchen. So wird dieser bald finden, daß die angegebenen 12 Malter $^1/_5$ der Weizenernte ausmachen, daß dann $^1/_5 = 6$ Malter und $^5/_5$, die ganze Ernte $= 5 \times 6 = 30$ Malter beträgt. Damit hat er auch gefunden, daß $^3/_5 =$ 18 Malter sind, und jedes Malter also $^{99}/_{18}$ Thl. $= 5^1/_{11}$ Thl. kostet.

15) Ein Reisender reiset von A nach D. Den ersten Tag reiset er bis B $^1/_6$ des Weges von A nach D, den zweiten Tag bis C $^1/_6$

image
not
available

Pfund wieder verkaufen, wenn er $^1/_{10}$ am Einkaufspreise nebst den Kosten gewinnen will? b) Wie viel beträgt dann der Gewinn überhaupt? 100 Pfund in Amsterdam sind 106 Pfund in Düsseldorf. 1 Ctnr. in Amsterdam = 100 Pfund. 1 Gulden = 20 Stüver in Amsterdam = $16^1/_2$ Sgr. in Düsseldorf. Antw. a) zu 6 Sgr. bein. b) 56 Thl. 5 Sgr. 8 Pfg. sehr nahe.

Anmerkung. Die meisten Rechnungsvorfälle im bürgerlichen Verkehr können vermittelst der Regel de tri gelöset werden, und werden auch häufig darnach gelöset. Nicht ohne Grund hat man daher schon vor langer Zeit die Regel de tri auch wol die goldene Regel genannt. Viele Aufgaben aus der Wechselrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung u. s. w. lassen sich durch eine einmalige oder mehrmalige Anwendung der einfachen Proportion berechnen, warum soll man denn solche so weit hinausschieben bis in die letzten Schuljahre des Schülers. Vielleicht kommt er gar nicht so weit in seinem Rechenbuche, wie dann? Der Lehrer muß es sich, wie schon gesagt, zu seinem Grundsatz machen, daß der Schüler mit einem Mittel, in dessen Besitz er ist, sich alles unterwerfe, was in dem Bereich dieses Mittels liegt. Mit den vier Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen und mit Hülfe der Proportionslehre läßt sich erstaunlich viel ausrichten. Aber — Eile mit Weile, d. h. soll der Schüler mit wenigen Mitteln viel leisten, so muß er diese auch völlig in seiner Gewalt haben. Dazu wird aber erfordert, daß er mit sicherm Schritte und mit deutlicher Einsicht vordringe. Ohne dieß findet er überall Schwierigkeiten und Hindernisse, und er bewegt sich mit seiner Kunst ängstlich und schwerfällig in einem engen Kreise herum, fühlt sich gleichsam in diesen wie in einen Zauberkreis gebannt, den er ohne Gefahr nicht überschreiten zu dürfen glaubt. Aus diesem Gesichtspunkte müssen nach meiner Meinung einige Aufgaben unseres ersten Uebungsbuches angesehen werden. Ich führe daraus eine als Beispiel an, die siebenzehnte in der Addition in Brüchen.

19) („17) Von einer Waare wurden verkauft $^2/_5 + {}^1/_3 + {}^1/_6$ und „70 Pfund; der Rest betrug 50 Pfund; wie viel Pfund waren „anfänglich vorräthig.") —

Diese Aufgabe kann ohne andere Hülfsmittel, bloß durch die Addition gelöset werden. $^2/_5 + {}^1/_3 + {}^1/_6 = {}^{27}/_{30} = {}^9/_{10}$. Ist das Kind gehörig vorbereitet worden, so sieht es gleich ein, daß hier noch $^1/_{10}$ am Ganzen fehlen. Dieses mangelnde Zehntel der Waare muß also noch da sein, da aber vom Ganzen sich nichts weiter vorfindet, als 70 + 50; so muß auch $^1/_{10} = 70 + 50 = {}^1/_{10} = 120$. Ist aber $^1/_{10} = 120$, so sind gewiß $^{10}/_{10} = 10 \times 120 = 1200$ Pfund.

Daß man auch verwickelte Aufgaben aus reinen Proportionen bilden und doch durch einfache Mittel sie lösen könne, mögen folgende Schlußaufgaben beweisen.

20) Das erste Glied einer Proportion verhält sich zum zweiten wie 3 zu 4; der Unterschied des zweiten und dritten Gliedes ist 21; die Summe des dritten und vierten ist 63. Wie heißt die Proportion?

Aufl. Das dritte Glied verhält sich zum vierten, wie das erste zum zweiten, also wie 3 zu 4. Es kommt nun darauf an, die Summe des dritten und vierten Gliedes so zu theilen, daß sich die Theile wie 3 zu 4 verhalten. Dazu wird nun erfordert, daß man das Ganze in 7 Theile theile, und dem einen Gliede dieser Theile 3 und dem andern 4 gebe. Das Ganze oder die Summe ist 63, durch 7 getheilt wird jeder Theil 9. Die beiden Glieder

image
not
available

der Probe gefehlt worden ist. Entweder die Aufgabe oder die Probe muß nun von neuem gerechnet werden.

Beispiel. 4 Pfund Zucker werden für 1¹/₂ Thl. gekauft, wie hoch werden 100 zu stehen kommen?

Aufl. 4 Pfd. : 100 Pfd. = 1¹/₂ Thl. : x

x = 45 Thl.

Man kann über diese Berechnung verschiedene Proben anstellen.

Erste Probe. 100 Pfd. : 4 = 45 Thl. : x

x = 1¹/₂ Thl.

Wir haben vorhin gesehen, daß in einer geometrischen Proportion das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkt der innern Glieder. In einem Regel de tri-Satze ist aber die Antwort das vierte Glied. Setzt man daher statt x die gefundene Antwort, und multiplicirt diese mit dem ersten Gliede, so muß dieß Produkt gleich sein dem Produkte der mittleren Glieder. Sind diese beiden Produkte nicht übereinstimmend, so ist die Rechnung unrichtig, kommen beide überein, so hat man richtig gerechnet. Z. B. In obiger Aufgabe war die Antwort 45 Thl. Die vollständige Proportion heißt nun 4 : 100 = 1¹/₂ : 45. Daher ist 4 . 45 = 1¹/₂ . 100. Beide Produkte sind 180, also ist die Rechnung richtig.

Eine dritte Probe. Es ist oben gezeigt worden, daß in einer geometrischen Proportion das erste Glied so oft im zweiten, als das dritte Glied im vierten enthalten ist. Man dividire daher das erste Glied in das zweite, und das dritte in das vierte, d. h. in das gefundene Resultat. Sind beide Quotienten gleich, so ist die Berechnung richtig; sind sie ungleich, so ist sie unrichtig. Beispiel. In voriger Aufgabe waren die beiden ersten Glieder 4 zu 100, hier ergibt sich der Quotient 25. Das dritte und vierte Glied waren 1¹/₂ und 45, von welchen man auch den Quotient 25 erhält. Ebenfalls ein Beweis für die Richtigkeit der obigen Berechnung.

Es ist aber nothwendig, hiebei wohl zu bemerken, daß eine solche Probe nur die Richtigkeit der Rechenoperation, nicht aber die Richtigkeit des Ansatzes, der Anordnung der Glieder verbürgen kann. Ein fehlerhafter Ansatz kann durch keine Rechenprobe entdeckt werden. Uebrigens ist es viel werth, wenn der Lehrer darauf hält, daß der Schüler schnell und doch mit Sicherheit rechnen lernt.

Sechster Abschnitt.

C. Umgekehrte Regel de tri.

Vorbemerkung. Es ist nun einmal Gebrauch, der sogenannten „umgekehrten Regel de tri" in den Rechenbüchern ein eignes Kapitel zu widmen. Bei jeder Regel de tri-Aufgabe überlegt der denkende Rechner, ob, den Bedingungen der Aufgabe nach, die Verhältnisse der Proportion zunehmend oder abnehmend stehen müssen. Für diesen wäre die Eintheilung der Regel de tri in gerade und umgekehrte eben nicht nothwendig; indeß würde er, wenn er anders an ein geordnetes Denken und Arbeiten gewöhnt worden, bald für sich zwei besondere Fälle oder Arten von Regel de tri-Aufgaben unterscheiden, nämlich erster Fall: Proportionsaufgaben, in welchen mit dem Wachsthum oder mit der Abnahme des ersten Verhältnisses auch das Wachsthum oder die Abnahme des zweiten Verhältnisses verbunden ist; zweiter Fall: Proportionsaufgaben, in welchen das zweite Verhältniß in gleichem Maße zunimmt, wie das erste Verhältniß abnimmt oder in welchen das zweite Verhältniß in demselben Grade abnimmt, in welchem das

image
not
available

image
not
available

als von $^7/_4$ Elle Breite. Wie viel Ellen muß er davon zum Kleide nehmen? Antw. 6 Ellen.

Aufl. Je kleiner bei gleicher Flächengröße die Breite, desto größer muß die Länge sein. Daher $^7/_4 : {}^9/_4 = 4^2/_3 : x$ oder $7 : 9 = 4^2/_3 : x$.

10) In einer Festung erhalten 1200 Mann auf 6 Monat Lebensmittel, zu gleicher Zeit erhalten 200 Mann Befehl auszumarschiren; wie lange werden die übrigen mit diesem Vorrath auskommen? Antw. 7 Monate 6 Tage.

Auflösung. $1000 : 1200 = 6 : x$.

11) 4500 Thaler haben in 4 Jahren eine gewisse Summe Zinsen eingebracht; in wie viel Zeit werden 7200 Thl. eben so viel Zinsen einbringen? Antw. In $2^1/_2$ Jahren.

Auflösung. Je größer das Kapital, desto kürzer die Zeit für dieselbe Zinssumme. Daher $7200 : 4500 = 4 : x$.

12) 1000 Thl. haben zu 5 Proc. auf Zins gestanden; wie hoch muß man 1250 Thl. verzinsen, um eben so viel Zinsen zu erhalten? Antw. 4 Proc.

Auflösung. Je größer das Kapital, desto niedriger der Zinsfuß für dieselbe Zinssumme. Daher $1250 : 1000 = 4 : x$.

Vorbereitende Fragen. Wie hoch stehen 1000 Thl. verzinset? Was heißt das, zu 5 Proc.? Will man von 1250 Thl. mehr oder weniger Zinsen haben als von 1000 Thl.? Was würde aber erfolgen, wenn man 1250 eben so hoch verzinsete als 1000 Thl.? Was wird man also thun müssen, um von 1250 Thl. gerade so viel Zinsen zu erhalten, als von 1000 Thl? In welches Verhältniß müssen daher die beiden Kapitalien gestellt werden, damit weniger als 5 Proc. komme? Gib jetzt die Proportion an!

13) In 4 Monaten erhält man von 800 Thl. eine gewisse Zinssumme; wie groß muß das Kapital sein, welches in 10 Monaten dieselben Zinsen einbringt? Antw. 320 Thl.

Auflösung. Je länger die Zeit, desto kleiner das Kapital. $10 : 4 = 800 : x$.

14) Wenn A täglich 2 Thl. ausgibt, so macht er jährlich $82^1/_2$ Thl. Schulden, wie viel muß er täglich ausgeben, um noch jährlich 100 Thl. zu erübrigen?

Fragen. Welche Folgen hatte es, wenn A täglich 2 Thl. ausgab? Wie viel weniger mußte er jährlich ausgeben, um nicht in Schulden zu gerathen? ($82^1/_2$ Thl.) Wie viel weniger mußte er aber ausgeben, wenn er noch 100 Thl. erübrigen wollte? ($100 + 82^1/_2$ Thl.) Wie viel betrug die jährliche Ausgabe, wenn 2 Thl. auf jeden Tag gerechnet wurde? (730 Thl.) Wie viel muß sie aber betragen, wenn er jene Schulden vermeiden und noch 100 Thl. erübrigen wird? $[730 - (100 + 82^1/_2) = 730 - 182^1/_2 = 547^1/_2]$. Je mehr erübrigt werden soll, desto kleiner müssen die täglichen Ausgaben sein, und wie sich die ersten jährlichen Ausgaben (730) zu der verminderten ($547^1/_2$) verhalten, so muß sich auch die erste tägliche Ausgabe zu der verminderten täglichen verhalten.

image
not
available

image
not
available

l. $4 : 18 = 46\frac{2}{3} : x$

$4 : \frac{18}{3} = 140 : x$

$4 : 6 = 150 : x$

$1 : 6 = 35 : x$

$x = 6 \times 35 = 210$ Thl.

m. $4 : 18 = 46\frac{2}{3} : x$

$4 : \frac{18}{140} : x$

$4x = 18 \cdot \frac{140}{3} :$

$4x = 6 \cdot 140$

$4x = 840$

$x = 210$ Thl.

n. $4 : 18 = 46\frac{2}{3} : x$

$4 : 3.3.2 = 46\frac{2}{3} : x$

$2 : 3.3 = 46\frac{2}{3} : x$

$2 : 3 = 140 : x$

$1 : 3 = 70 : x$

$x = 210$ Thl.

Anmerkung. Ist der Schüler mit den Decimalbrüchen bekannt, so kann man diese Auflösungsarten noch vermehren. Aus der Behandlung dieser Aufgabe kann der Lehrer entnehmen, welche Vortheile und Abkürzungen bei den Auflösungen Statt finden können. Glieder mit gebundenen Zahlen, d. h. mit höhern und niedern Geldsorten, Maßen und Gewichten, werden entweder in die niedrigste gegebene Sorte aufgelöset, oder die niedern Sorten werden in Bruchform auf die höchste gegebene Sorte reducirt.

11) A kauft ein Stück feine Leinwand von $43\frac{1}{2}$ Ellen und muß für 3 Ellen 1 Thl. 7 Sgr. 6 Pfg. bezahlen; a) wie viel kostet das ganze Stück? b) wie viel Ellen muß man zusammen nehmen, um zuerst den Preis gerade in ganzen Thalern geben zu können? Antw. a) $18\frac{1}{8}$ Thl. oder 18 Thl. $3\frac{3}{4}$ Sgr., oder 18 Thl. 3 Sgr. 9 Pfg. b) 12 Ellen zu 5 Thl.

Das zusammengesetzte Glied 1 Thl. 7 Sgr. 6 Pfg. kann der Schüler darstellen 1) in Pfenningen. 1 Thl. = 360 Pfg.; 7 Sgr. = 84 Pfg.; 360 + 84 + 6 = 450 Pfg. Die Proportion heißt dann: $3 : 43\frac{1}{2} = 450 : x$. Hier erscheint dann das vierte Glied x auch in Pfenningen, welche zuerst durch 12 dividirt in Sgr. und diese durch 30 dividirt in Thl. verwandelt werden. 2) In Silbergroschen. 1 Thl. = 30 Sgr.; 6 Pfg. = $\frac{1}{2}$ Sgr.; $30 + 7 + \frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$ Sgr. $3 : 43\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$ Sgr. : x Sgr., wo x in Sgr. dargestellt wird, welche, durch 30 dividirt, Thaler werden. 3) In Thalern. 6 Pfg. = $\frac{1}{2}$ Sgr.; $7\frac{1}{2}$ Sgr. = $\frac{1}{4}$ Thl. Die Proportion heißt nun: $3 : 43\frac{1}{2} = 1\frac{1}{4} : x$.

Um die Antwort auf die zweite Frage b zu erhalten, stelle man die angegebenen 3 Ellen mit dem in Thalern bezeichneten Preise in ein Verhältniß, also: $3 : 1\frac{1}{4}$. Multiplicirt man dieß

image
not
available

Anmerkung. Der Lehrer diktire, etwa am Samstag, solche Rechnungen, und lasse sie von den Schülern zu Hause ausarbeiten, und in Form einer Rechnung schön und sauber zu Papier bringen. Die Eltern sehen solche Arbeit gern, und dieß ist zugleich eins von den Mittelchen, dieselben für den Unterricht zu gewinnen. Manches, was in der Schule vorgenommen wird, verstehen die Eltern nicht zu beurtheilen, und dieß mag wol der Grund sein, warum sich viele so wenig für den Unterricht interessiren. Finden sie aber ihre Kinder zu Hause mit einer Arbeit beschäftigt, die in das wirkliche Leben einschlägt, und von welcher sie den Nutzen aus eigener Erfahrung kennen, so lernen sie daraus den ganzen Unterricht schätzen und den Lehrer lieb gewinnen. Und wol dem Lehrer, welcher von Eltern und Kindern geliebt wird!

13) B erhält 4 Ballen Waare, bezeichnet M, N, O, P. M wiegt $248^3/_4$ Pfd., N $318^2/_3$, O $295^7/_8$, P $328^1/_2$ Pfd.; bezahlt für 100 Pfd. 47 Thl. 20 Sgr. a) Wie viel kostet jeder Ballen? b) Wie viel kosten diese 4 Ballen zusammen? c) Wie theuer ist jedes Pfund? Antw. a) M 118 Thl. $17^1/_8$ Sgr.
N 151 „ $26^1/_2$ „
O 141 „ 1 „
P 156 „ $17^{11}/_{20}$ „
b) 568 „ 2 „ $7^9/_{20}$ Pfg. zhlb.
c) — „ 14 „ 4 „

Der Lehrer vergesse nicht, die Aufgaben so einzurichten, daß die vier Rechnungsarten mit Brüchen wieder in Anwendung kommen. In dem von uns herausgegebenen praktischen Rechenbuche ist hierauf Bedacht genommen worden. Leicht vergißt der Schüler eine Rechenübung, wenn sie in der Reihenfolge der Aufgaben lange nicht mehr vorkommt. — Die Auflösung vorstehender Aufgabe hat an sich keine Schwierigkeit. Die Regeldetrisätze heißen:

$$100 : 248^3/_4 = 47^2/_3 : x$$
$$100 : 318^2/_3 = 47^2/_3 : x \text{ u. s. w.}$$

Die Summe der gefundenen Antworten gibt b; dividirt man $47^2/_3$ Thl. oder 1430 Sgr. durch 100, so erhält man c.

14) Der Bauer A hatte 120 Malter Hafer und 80 Malter Roggen geerntet. Am 5. Januar 1829 verkaufte er $^2/_5$ von seiner ganzen Weizenernte für 99 Thaler. Den 25. Februar verkauft er auch den Rest von 12 Maltern in demselben Preise; wie theuer war 1 Malter Weizen?

Anmerkung. Diese Aufgabe enthält absichtlich manches Ueberflüssige; z. B. die Angabe der Hafer- und Roggenernte und des Datums. Der Schüler soll die Bestimmungen herausheben lernen, durch welche die Lösung der Aufgabe bedingt ist. Enthält nun diese außerwesentliche Umstände, so ist er genöthigt, diese von dem Wesentlichen zu sondern, und eine solche Geistesarbeit ist eben geeignet, die Denkkraft des Schülers in Thätigkeit zu setzen. Der beschränkte und ungeübte Kopf wird leicht durch solche unnöthige Angaben verwirrt, der fähige und geübte Kopf weiß sich bald zurecht zu finden, und findet bisweilen ein Vergnügen daran, die versteckten Punkte, von welchen die Auflösung der Aufgabe abhangt, aufzusuchen. So wird dieser bald finden, daß die angegebenen 12 Malter $^2/_5$ der Weizenernte ausmachen, daß dann $^1/_5 = 6$ Malter und $^5/_5$, die ganze Ernte $= 5 \times 6 = 30$ Malter beträgt. Damit hat er auch gefunden, daß $^2/_5 =$ 18 Malter sind, und jedes Malter also $^{99}/_{18}$ Thl. $= 5^1/_2$ Thl. kostet.

15) Ein Reisender reiset von A nach D. Den ersten Tag reiset er bis B $^1/_6$ des Weges von A nach D, den zweiten Tag bis C $^1/_4$

image
not
available

Pfund wieder verkaufen, wenn er $^1/_{10}$ am Einkaufspreise nebst den Kosten gewinnen will? b) Wie viel beträgt dann der Gewinn überhaupt? 100 Pfund in Amsterdam sind 106 Pfund in Düsseldorf. 1 Ctnr. in Amsterdam = 100 Pfund. 1 Gulden = 20 Stüver in Amsterdam = $16^1/_2$ Sgr. in Düsseldorf. Antw. a) zu 6 Sgr. bein. b) 56 Thl. 5 Sgr. 8 Pfg. sehr nahe.

Anmerkung. Die meisten Rechnungsvorfälle im bürgerlichen Verkehr können vermittelst der Regel de tri gelöset werden, und werden auch häufig darnach gelöset. Nicht ohne Grund hat man daher schon vor langer Zeit die Regel de tri auch wol die goldene Regel genannt. Viele Aufgaben aus der Wechselrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung u. s. w. lassen sich durch eine einmalige oder mehrmalige Anwendung der einfachen Proportion berechnen, warum soll man denn solche so weit hinausschieben bis in die letzten Schuljahre des Schülers. Vielleicht kommt er gar nicht so weit in seinem Rechenbuche, wie dann? Der Lehrer muß es sich, wie schon gesagt, zu seinem Grundsatz machen, daß der Schüler mit einem Mittel, in dessen Besitz er ist, sich alles unterwerfe, was in dem Bereich dieses Mittels liegt. Mit den vier Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen und mit Hülfe der Proportionslehre läßt sich erstaunlich viel ausrichten. Aber — Eile mit Weile, d. h. soll der Schüler mit wenigen Mitteln viel leisten, so muß er diese auch völlig in seiner Gewalt haben. Dazu wird aber erfordert, daß er mit sicherm Schritte und mit deutlicher Einsicht vordringe. Ohne dieß findet er überall Schwierigkeiten und Hindernisse, und er bewegt sich mit seiner Kunst ängstlich und schwerfällig in einem engen Kreise herum, fühlt sich gleichsam in diesen wie in einen Zauberkreis gebannt, den er ohne Gefahr nicht überschreiten zu dürfen glaubt. Aus diesem Gesichtspunkte müssen nach meiner Meinung einige Aufgaben unseres ersten Uebungsbuches angesehen werden. Ich führe daraus eine als Beispiel an, die siebenzehnte in der Addition in Brüchen.

19) („17) Von einer Waare wurden verkauft $^2/_5 + {}^1/_3 + {}^1/_6$ und „70 Pfund; der Rest betrug 50 Pfund; wie viel Pfund waren „anfänglich vorräthig.") —

Diese Aufgabe kann ohne andere Hülfsmittel, bloß durch die Addition gelöset werden. $^2/_5 + {}^1/_3 + {}^1/_6 = {}^{27}/_{30} = {}^9/_{10}$. Ist das Kind gehörig vorbereitet worden, so sieht es gleich ein, daß hier noch $^1/_{10}$ am Ganzen fehlen. Dieses mangelnde Zehntel der Waare muß also noch da sein, da aber vom Ganzen sich nichts weiter vorfindet, als 70 + 50; so muß auch $^1/_{10} = 70 + 50 = {}^1/_{10} = 120$. Ist aber $^1/_{10} = 120$, so sind gewiß $^{10}/_{10} = 10 \times 120 = 1200$ Pfund.

Daß man auch verwickelte Aufgaben aus reinen Proportionen bilden und doch durch einfache Mittel sie lösen könne, mögen folgende Schlußaufgaben beweisen.

20) Das erste Glied einer Proportion verhält sich zum zweiten wie 3 zu 4; der Unterschied des zweiten und dritten Gliedes ist 21; die Summe des dritten und vierten ist 63. Wie heißt die Proportion?

Aufl. Das dritte Glied verhält sich zum vierten, wie das erste zum zweiten, also wie 3 zu 4. Es kommt nun darauf an, die Summe des dritten und vierten Gliedes so zu theilen, daß sich die Theile wie 3 zu 4 verhalten. Dazu wird nun erfordert, daß man das Ganze in 7 Theile theile, und dem einen Gliede dieser Theile 3 und dem andern 4 gebe. Das Ganze oder die Summe ist 63, durch 7 getheilt wird jeder Theil 9. Die beiden Glieder

image
not
available

der Probe gefehlt worden ist. Entweder die Aufgabe oder die Probe muß nun von neuem gerechnet werden.

Beispiel. 4 Pfund Zucker werden für $1^1/_4$ Thl. gekauft, wie hoch werden 100 zu stehen kommen?

Aufl. 4 Pfd. : 100 Pfd. = $1^1/_4$ Thl. : x

$x = 45$ Thl.

Man kann über diese Berechnung verschiedene Proben anstellen.

Erste Probe. 100 Pfd. : 4 = 45 Thl. : x

$x = 1^1/_4$ Thl.

Wir haben vorhin gesehen, daß in einer geometrischen Proportion das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkt der innern Glieder. In einem Regel de tri-Satze ist aber die Antwort das vierte Glied. Setzt man daher statt x die gefundene Antwort, und multiplicirt diese mit dem ersten Gliede, so muß dieß Produkt gleich sein dem Produkte der mittleren Glieder. Sind diese beiden Produkte nicht übereinstimmend, so ist die Rechnung unrichtig, kommen beide überein, so hat man richtig gerechnet. Z. B. In obiger Aufgabe war die Antwort 45 Thl. Die vollständige Proportion heißt nun 4 : 100 = $1^1/_4$: 45. Daher ist 4 . 45 = $1^1/_4$. 100. Beide Produkte sind 180, also ist die Rechnung richtig.

Eine dritte Probe. Es ist oben gezeigt worden, daß in einer geometrischen Proportion das erste Glied so oft im zweiten, als das dritte Glied im vierten enthalten ist. Man dividire daher das erste Glied in das zweite, und das dritte in das vierte, d. h. in das gefundene Resultat. Sind beide Quotienten gleich, so ist die Berechnung richtig; sind sie ungleich, so ist sie unrichtig. Beispiel. In voriger Aufgabe waren die beiden ersten Glieder 4 zu 100, hier ergibt sich der Quotient 25. Das dritte und vierte Glied waren $1^1/_4$ und 45, von welchen man auch den Quotient 25 erhält. Ebenfalls ein Beweis für die Richtigkeit der obigen Berechnung.

Es ist aber nothwendig, hiebei wohl zu bemerken, daß eine solche Probe nur die Richtigkeit der Rechenoperation, nicht aber die Richtigkeit des Ansatzes, der Anordnung der Glieder verbürgen kann. Ein fehlerhafter Ansatz kann durch keine Rechenprobe entdeckt werden. Uebrigens ist es viel werth, wenn der Lehrer darauf hält, daß der Schüler schnell und doch mit Sicherheit rechnen lernt.

Sechster Abschnitt.

C. Umgekehrte Regel de tri.

Vorbemerkung. Es ist nun einmal Gebrauch, der sogenannten „umgekehrten Regel de tri" in den Rechenbüchern ein eignes Kapitel zu widmen. Bei jeder Regel de tri-Aufgabe überlegt der denkende Rechner, ob, den Bedingungen der Aufgabe nach, die Verhältnisse der Proportion zunehmend oder abnehmend stehen müssen. Für diesen wäre die Eintheilung der Regel de tri in gerade und umgekehrte eben nicht nothwendig; indeß würde er, wenn er anders an ein geordnetes Denken und Arbeiten gewöhnt worden, bald für sich zwei besondere Fälle oder Arten von Regel de tri-Aufgaben unterscheiden, nämlich erster Fall: Proportionsaufgaben, in welchen mit dem Wachsthum oder mit der Abnahme des ersten Verhältnisses auch das Wachsthum oder die Abnahme des zweiten Verhältnisses verbunden ist; zweiter Fall: Proportionsaufgaben, in welchen das zweite Verhältniß in gleichem Maße zunimmt, wie das erste Verhältniß abnimmt oder in welchen das zweite Verhältniß in demselben Grade abnimmt, in welchem das

image
not
available

3) Eine Arbeit wurde 40 Personen übergeben, und diese vollendeten sie in 18 Wochen; ein gleiches Stück Arbeit wurde in 15 Wochen vollendet; wie viel Personen haben daran gearbeitet? Antw. 48 Personen.

Auflösung. Je weniger Zeit, desto mehr Arbeiter; daher 15 : 18 = 40 : x.

4) 10 Schreiber übernehmen es, ein Werk in 8 Wochen abzuschreiben. Gleich im Anfang erhalten sie einen Regierungsbefehl, daß sie diese Abschrift in 4 Wochen vollendet haben müßten. Wie viel Schreiber mußten noch angestellt werden? Antw. Noch 10 Schreiber, also im Ganzen 20 Schreiber.

Auflösung. Halbe Zeit, doppelte Anzahl Schreiber; daher 4 : 8 = 20 : x.

5) 12 Arbeiter vollenden eine gewisse Arbeit in 20 Tagen; in wie viel Tagen werden 15 Arbeiter eine gleiche Arbeit zu Stande bringen? Antw. In 16 Tagen.

Auflösung. Je mehr Arbeiter, desto weniger Arbeitszeit.
15 : 12 = 20 : x.

6) Ein Fuhrmann übernahm für ein bestimmtes Frachtgeld $6^2/_3$ Centner 15 Stunden weit zu fahren. Beim Aufladen findet sich aber, daß die Waare $7^1/_2$ Ctnr. wiegt; wie weit wird er diese für das bedungene Frachtgeld fahren? Antw. $13^1/_3$ Stunde.

Auflösung. Natürlicher Weise wird er für dasselbe Frachtgeld $7^1/_2$ Ctnr. nicht so weit fahren, als $6^2/_3$ Ctnr. Daher eine abnehmende Proportion: $7^1/_2 : 6^2/_3 = 15 : x$.

Die Beschaffenheit der Wege wird hier gleich gesetzt.

7) Jemand will von A nach B reisen. Geht er täglich 8 Stunden, so kommt er in 15 Tagen in B an; wie bald wird er aber daselbst ankommen, wenn er täglich 10 Stunden reiset? Antw. In 12 Tagen.

Auflösung. 10 : 8 = 15 : x. Aus welchem Grunde?

8) 6 Personen reichen mit einem gewissen Vorrath von Lebensmitteln 16 Wochen aus; wie lange werden 8 Personen mit gleichem Vorrath ausreichen? Antw. 12 Wochen.

Anmerkung. Sollte ein Schüler den richtigen Ansatz einer Aufgabe einmal verfehlen, so lasse der Lehrer ihn fortarbeiten, und fasse nun den Schüler bei der gefundenen Antwort so, daß er die Ungereimtheit derselben einsieht. Z. B. Ein Schüler hätte hier den Ansatz so gestellt:

6 : 8 = 16 : x

x = $21^1/_3$ Wochen.

Nun frage der Lehrer: Was solltest du in dieser Aufgabe rechnen? Wie lange 8 Personen mit einer bestimmten Menge Lebensmittel auskämen. Was hast du da gefunden? Sch. $21^1/_3$ Wochen. L. Du meinst also, 8 Personen könnten $21^1/_3$ Wochen mit derselben Menge Lebensmittel ausreichen, welche für 6 Personen nur auf 16 Wochen hinreichen? Hier wird der Schüler das Ungereimte seiner Antwort wol einsehen, und seinen Ansatz berichtigen.

9) Jemand brauchte zu einem Kleide $4^2/_3$ Ellen Tuch, welches $^9/_4$ Ellen breit ist; er kann aber von dieser Sorte kein anderes haben,

image
not
available

Also: $730 : 547\frac{1}{2} = 2 : x$, wo $x = 1\frac{1}{2}$.

Oder noch verständlicher: A muß jährlich $82\frac{1}{2} + 100$ Thl. $= 182\frac{1}{2}$ Thl. weniger ausgeben, das macht auf einen Tag $= \frac{182\frac{1}{2}}{365} = \frac{365}{730} = \frac{1}{2}$ Thl., demnach muß jetzt seine tägliche Ausgabe sein $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ Thl.

15) A hatte von B 3000 Thl. 10 Monate lang, ohne Zinsen davon zu bezahlen. Ueber einige Zeit bot A dem B ein Kapital von 2400 Thl. ohne Zinsen an, mit dem Bedeuten, diese Summe so lange zu behalten, bis Dienst und Gegendienst einander gleich wären. Wie lange darf B diese Summe behalten? Antw. $12\frac{1}{2}$ Monat.

Auflösung. Wenn Dienst und Gegendienst einander gleich sein sollen, so ist leicht zu begreifen, daß B 2400 Thl. eine längere Zeit haben muß als A 3000 Thl. hatte. Je kleiner das Kapital, desto länger die Zeit. Daher muß das Verhältniß zunehmend gestellt werden.

$2400 : 3000 = 10$ M. $: x$, $x = 12\frac{1}{2}$ Monat.

16) Aus $3\frac{3}{4}$ Malter Roggen wurden 180 siebenpfündige Brode gebacken; wie viel zehnpfündige Brode hätte man daraus backen können? Antw. 126 zehnpfündige Brode.

Auflösung. $10 : 7 = 180 : x$

$x = 126$ Brode.

17) Russische Rubel verhalten sich zu preuß. Thalern wie 14 zu 13; wie viel betragen demnach 1950 russische Rubel in preuß. Thl.? Antw. 2106 Thl.

Vorbereitende Fragen. Welche von beiden Münzen hat den größern Werth? Sch. Russische Rubel. Woran erkennst du das? Sch. Der Rubel hat 14 Theile an Werth, deren der Thl. nur 13 hat. Wenn du den Werth eines einzelnen Stücks dieser Münzen angeben wolltest, wie würdest du diesen bestimmen müssen? Sch. Der Rubel gilt $\frac{14}{14}$, oder 1 Rubel $= \frac{14}{14}$ Rubel, 1 Thl. $= \frac{13}{14}$ Rubel.

Wie viel Stück würdest du wol von jeder Sorte zusammen nehmen müssen, um gleichen Werth an beiden zu haben? Sch. — Besinne dich; würdest du gleichen Werth erhalten, wenn du von jeder Sorte eine gleiche Anzahl nähmest? Sch. Nein, dann würden die Rubel einen höhern Werth haben. Die Anzahl beider Stücke darf also nicht gleich sein. Nun ist die Frage, wirst du eine größere Anzahl der Stücke von geringerem Werth (Thaler), oder von größerem Werth (Rubel), nehmen müssen? Sch. Ich muß mehr Thaler nehmen. Wie viel Stück Thaler wirst du nehmen müssen, um einer gewissen Anzahl Rubel an Werth gleich zu kommen? Sch. — Wir wollen beiden Münzsorten nach ihrem wahren Verhältniß einen beliebigen Werth geben, um zu sehen, ob wir die richtige Antwort finden; der Rubel gelte 14 Sgr. Der Thl. 13. Wir setzen also:

image
not
available

gesetzten Verhältnissen gründet. In der einfachen Regel de tri wird jedesmal zu drei gegebenen Gliedern das unbekannte vierte Glied gesucht. Die Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri enthalten aber mehr als drei Glieder, oder mehr als zwei Verhältnisse. Doch liegt der Unterschied dieser beiden Rechenarten nicht wesentlich in der Anzahl der gegebenen Glieder, sondern vielmehr in dem Verhältniß der Anzahl dieser Glieder zu dem unbekannten Gliede, welches gesucht wird. Es kann eine Aufgabe eine Menge Verhältnißglieder enthalten, und dennoch nicht zu der zusammengesetzten Regel de tri gehören. Jede Aufgabe hat einen oder mehrere Fragefälle oder Zielpunkte. Wenn nun für jeden Fragefall drei Glieder in der Aufgabe gegeben sind, so gehört sie in die einfache Regel de tri, die Anzahl der Glieder mag so groß sein als sie will. Wird aber der Fragefall oder das Ziel der Aufgabe durch mehr als drei Verhältnißglieder bedingt, so gehört sie zur zusammengesetzten-Regel de tri. Zwar kann man jede Aufgabe der zusammengesetzten Regel de tri durch einzelne einfache Proportionen lösen, aber dann müssen doch erst Verhältnißglieder gesucht werden, die nicht gegeben sind. In der einfachen Regel de tri wird man dagegen für jeden Fragefall schon drei Verhältnißglieder vorfinden. Beispiel:

A. 100 Pfund einer Waare kosten $12\frac{1}{2}$ Thaler, wie viel kosten demnach a) 1200 Pfd.? b) 1 Pfd.? c) 1 Loth?

Hier kommen 5 Glieder vor, nämlich 1) 100 Pfund; 2) 1200 Pfd.; 3) 1 Pfd.; 4) 1 Loth; 5) $12\frac{1}{2}$ Thl.

B. 6 Arbeiter haben in 3 Tagen $7\frac{1}{2}$ Thl. verdient; wie viel werden 8 Arbeiter, welche 4 Tage arbeiten, erhalten?

Hier kommen ebenfalls 5 Glieder vor, nämlich 1) 6 Arbeiter. 2) 8 Arbeiter. 3) 3 Tage. 4) 4 Tage. 5) $7\frac{1}{2}$ Thl.

Bei A haben wir 3 Fragefälle: a, b, c; die 3 gegebenen Proportionsglieder für jeden heißen:

a) 100 Pfd. : 1200 Pfd. = $12\frac{1}{2}$ Thl. : x
b) 100 Pfd. : 1 Pfd. = $12\frac{1}{2}$ Thl. : x
c) 100 Pfd. : 1 Loth = $12\frac{1}{2}$ Thl. : x

Bei B ist Ein Fragefall, Eine unbekannte Größe durch die angeführten 5 Glieder bedingt. Nach der einfachen Regel de tri gerechnet, würde man setzen müssen:

6 Arb. : 8 Arb. = $7\frac{1}{2}$ Thl. : x
3 Tage : 4 Tag. = x : y
y = $13\frac{1}{3}$ Thl.

§. 43. Was in den Paragraphen 12, 13, 14, 15 von den zusammengesetzten Verhältnissen gesagt worden ist, bitten wir, ehe wir weiter gehen, noch einmal aufmerksam durchzulesen. Die Behandlung folgender Aufgabe wird vielleicht am besten zeigen, wie der Lehrer verfahren muß, um dem Schüler zu deutlicher Einsicht in die Rechnungsart zu verhelfen.

image
not
available

$$\left.\begin{array}{l} 2 : 4 \\ 3 : 6 \\ 4 : 12 \end{array}\right\} = 28 : x$$

$$\begin{array}{rl} 24 : 288 & = 28 : x \\ = 1 : 12 & = 28 : x \end{array}$$

$$x = 336 \text{ Sgr.} = 11 \text{ Thl. } 6 \text{ Sgr.}$$

Es ist früher gelehrt worden, daß man die Vorderglieder aufheben kann. Geschieht dieß, so ergibt sich folgendes einfache Verhältniß:

$$\left.\begin{array}{l} 1 : 2 \\ 1 : 2 \\ 1 : 3 \end{array}\right\} = 28 : x$$

$$1 : 12 = 28 : x$$

$$x = 336 \text{ Sgr.} = 11 \text{ Thl. } 6 \text{ Sgr.}$$

Ueberhaupt hat der Schüler schon früher gelernt, wie man ein zusammengesetztes Verhältniß behandeln muß, um das unbekannte vierte Glied schnell zu finden. Es ist deshalb nun weiter nichts mehr nöthig, als den Ansatz einer solchen Aufgabe zu lehren. Vor allen Dingen muß der Schüler angehalten werden, den Zielpunkt oder den Fragefall der Aufgabe aufzusuchen. Dieß ist der Hauptpunkt, auf welchen alle Verhältnisse der Aufgabe gerichtet sein müssen; oder der Fragefall ist der Maßstab, an welchen jedes Verhältniß der Aufgabe gelegt werden muß, um daran zu ermessen, ob dasselbe zunehmend oder abnehmend zu stellen ist. In voriger Aufgabe war der Arbeitslohn der Fragefall; das erste Verhältniß hieß: 2 Arbeiter zu 4 Arbeitern. Dieses lege ich an den Fragefall, und frage: werden 4 Arbeiter mehr oder weniger Arbeitslohn erhalten als 2. Natürlicher Weise mehr, daraus ergibt sich dann wieder, daß das Verhältniß ein wachsendes sein muß, also 2 zu 4. — Das zweite Verhältniß hatte die Glieder 6 und 3 Tage. Für 3 Tage ist der Arbeitslohn bekannt, für 6 Tage wird er gesucht. Nun ist hier wieder die einfache Frage: wird für 6 Tage mehr Arbeitslohn erfordert oder für 3 Tage? Natürlicher Weise für 6 Tage. Also wieder ein steigendes Verhältniß 3 Tage : 6 Tagen. Die Glieder des dritten Verhältnisses heißen 12 und 4. Für 4 Stunden beträgt der Arbeitslohn 18 Sgr., ich suche ihn für 12 Stunden. Es ist einleuchtend, daß er für 12 Stunden größer sein muß, daher wird wieder ein zunehmendes Verhältniß erfordert, also 3 Stunden zu 12 Stunden. Diese drei zunehmenden Verhältnisse heißen nun:

$$\begin{array}{l} 2 : 4 \\ 3 : 6 \\ 4 : 12 \\ \hline 24 : 288 \end{array}$$

Daraus wird das einfache Verhältniß 24 : 288 und die einfache Proportion: 24 : 288 = 28 Sgr. : x. Sehen wir hier auf die Zusammenstellung der Glieder, so finden wir, daß immer zwei Glieder gleicher Art zusammen stehen, und zwar, je nachdem es die Natur der

image
not
available

§. 45. In manchen Rechenbüchern findet man die zusammengesetzte Regel de tri unter mehreren besondern Namen — der Regula quinque, septem, novem, undecim u. s. w., je nachdem nämlich die Aufgabe 5, 7, 9, 11 u. s. w. Glieder enthält, welche dann noch wieder abgetheilt werden in gerade (directa) und umgekehrte (inversa). Die Benennung: „zusammengesetzte Regel de tri" umfaßt diese alle, ja, genau genommen, alle Proportions-Aufgaben, in welchen mehr als drei Verhältnißglieder gegeben sind. Auch die Kettenregel gehört zu ihr; nur in etwas Außerwesentlichem, in der Stellung der Glieder, unterscheidet sie sich von jener.

Daher lassen sich auch alle Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri in einfache Dreisätze auflösen. Die Eintheilung der Aufgaben in „gerad" und „umgekehrt zusammengesetzte" ist unnöthig, besonders wenn die Aufgaben nach der Basedowschen Regel gerechnet werden. Es ist sehr gut, wenn der Lehrer Anfangs alle Aufgaben dieser Art in Regel de tri-Sätze zerlegen, und wirklich berechnen läßt. Als Beispiel diene die vorige Aufgabe:

a. 2 Arbeiter verdienen 28 Sgr.; wie viel werden demnach 4 Arbeiter verdienen? Arb. Arb. Sgr.

$$2 : 4 = 28 : x$$

$$x = 56 \text{ Sgr.}$$

b. In drei Tagen werden 56 Sgr. verdient, wie viel demnach in 6 Tagen? Tag Tag Sgr.

$$3 : 6 = 56 : x$$

$$x = 112 \text{ Sgr.}$$

c. In 4 Stunden werden 112 Sgr. verdient, wie viel in 12 Stunden? St. St. Sgr.

$$4 : 12 = 112 : x$$

$$x = 336 \text{ Sgr.} = 11 \text{ Thl. } 6 \text{ Sgr.}$$

Hat der Schüler dieß einige Zeit geübt, so lasse der Lehrer ihn die Operation jedes Regel de tri-Satzes nicht wirklich ausführen, sondern bloß anzeigen, und so mit den folgenden Sätzen verbinden. Z. B.

a. $2 \text{ Arb.} : 4 \text{ Arb.} = 28 \text{ Sgr.} : x$

$$x = \frac{4 \times 28}{2} \text{ Sgr.}$$

b. $3 \text{ Tag.} : 6 \text{ Tag.} = \frac{4 \times 28}{2} \text{ Sgr.}$

$$x = \frac{6 \times 4 \times 28}{3 \times 2} \text{ Sgr.} : x$$

c. $4 \text{ Stund.} : 12 \text{ Stund.} = \frac{6 \times 4 \times 28}{3 \times 2} \text{ Sgr.} : x$

$$x = \frac{12 \times 6 \times 4 \times 28}{3 \times 2} \text{ Sgr.} = {}^{8064}/_{24} \text{ Sgr.}$$

$$= 336 \text{ Sgr.} = 11 \text{ Thl. } 6 \text{ Sgr.}$$

image
not
available

image
not
available

b. 12 Arbeiter bearbeiten in $6\frac{3}{4}$ Tagen, bei 10stündiger Arbeit, ein Feld von 120 Fuß Länge und $67\frac{1}{2}$ Fuß Breite; wie viel Arbeiter werden zu einem ähnlichen Felde erfordert, welches 96 Fuß lang und $66\frac{2}{3}$ Fuß breit ist, wenn die Arbeit in $5\frac{1}{3}$ Tagen, den Tag zu 12 Stunden gerechnet, zu Stande gebracht werden soll? Antw. 10 Arbeiter.

Ansatz.				Aus welchem Grunde?
$5\frac{1}{3}$	:	$6\frac{3}{4}$	Tagen.	
12	:	10	Stund.	„ „ „ ?
120	:	96	Länge	„ „ „ ?
$67\frac{1}{2}$	:	$66\frac{2}{3}$	Breite	„ „ „ ?
x	:	120	Arbeitern	

x = 10 Arbeiter.

c. Dieselben Bedingungen bleiben, nur die Länge des zweiten Stücks ist unbekannt und soll gesucht werden.

Ansatz.				Aus welchem Grunde?
12	:	10	Arbeitern.	
10	:	12	Stund.	„ „ „ ?
$6\frac{3}{4}$	:	$5\frac{1}{3}$	Tagen	„ „ „ ?
$66\frac{2}{3}$	:	$67\frac{1}{2}$	Breite	„ „ „ ?
x	:	120	Länge	

x = 96 Fuß.

d. Unter denselben gegebenen Bedingungen wird die Breite des zweiten Stückes gesucht.

Ansatz.				Aus welchem Grunde?
12	:	10	Arbeitern.	
10	:	12	Stund.	„ „ „ ?
$6\frac{3}{4}$	:	$5\frac{1}{3}$	Tagen	„ „ „ ?
96	:	120	Länge	„ „ „ ?
x	:	$67\frac{1}{2}$	Breite	

x = $66\frac{2}{3}$ Fuß.

e. Dieselben Bedingungen bleiben, die Zahl der täglichen Arbeitsstunden für das zweite Stück wird gesucht.

Ansatz.				Aus welchem Grunde?
10	:	12	Arbeitern.	
$5\frac{1}{3}$	:	$6\frac{3}{4}$	Tagen	„ „ „ ?
120	:	96	Länge	„ „ „ ?
$67\frac{1}{2}$	:	$66\frac{2}{3}$	Breite	„ „ „ ?
x	:	10	Stund.	

x = 12 Stunden.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise behandle der Lehrer mehrere Aufgaben. Er wird dabei nicht vergessen, sich Ansatz und Ausarbeitung vorzeigen zu lassen.

5) Ein Kanal von 4800 Fuß Länge, 12 Fuß Tiefe und 45 Fuß Breite wurde von 300 Arbeitern, welche täglich 10 Stunden arbeiteten, in 292 Tagen vollendet. Darauf wurde von denselben Arbeitern unternommen, einen andern Kanal zu graben, welcher 6000 Fuß lang, 10 Fuß tief und 48 Fuß breit werden soll. Bald machte man die Erfahrung, daß wegen des härteren Bodens hier, im Vergleich mit dem ersten Kanal, täglich nur $\frac{8}{9}$ fortgeschritten

image
not
available

Wochen voll zu schreiben, wenn 20 Knaben in 18 Wochen 54 Schreibbücher zu $7\frac{1}{2}$ Bogen vollenden.

Probeansatz. 54 : 45 Schrbb., je wen. Schrbb., desto w. Knab.
$7\frac{1}{2}$: $4\frac{1}{2}$ Bogen, " " Bogen. " " "
15 : 18 Wochen, " " Wochen, desto m. "
x : 20 Knaben

x = 12 Knaben, gleich der Angabe in der berechneten Aufgabe.

Hier war also obige Ausarbeitung richtig. Man nehme nun einmal 18 Wochen als unbekannt an, und suche diese zu bestimmen. Die Aufgabe ist dann folgende: 12 Knaben schreiben in 15 Wochen 45 Schreibbücher, von $4\frac{1}{2}$ Bogen; wie viel Wochen werden 20 Knaben damit zubringen, 54 Schreibbücher von $7\frac{1}{2}$ Bogen voll zu schreiben?

Ansatz. 45 : 54 Schrbb., je mehr Schrbb., desto m. Wochen
20 : 12 Knaben, " " Knaben, desto w. "
$4\frac{1}{2}$: $7\frac{1}{2}$ Bogen, " " Bogen, desto m. "
x : 15 Wochen

x : 18 Wochen, der Angabe in der Aufgabe gemäß.

Beweis für die richtige Berechnung.

$4\frac{1}{2}$ Bogen sei = x, so haben wir folgende Aufgabe: 12 Knaben schreiben in 15 Wochen 45 Schreibbücher von $4\frac{1}{2}$ Bogen; wie viel Bogen werden 54 Schreibbücher enthalten, welche 20 Knaben bei gleichem Fleiße in 18 Wochen schreiben?

Ansatz 12 : 20 Knaben, je mehr Knaben, desto m. Bogen
15 : 18 Wochen, " " Wochen, " " "
54 : 45 Schrbb., " " Schrbb. " " "
x : $4\frac{1}{2}$ Bogen

x = $7\frac{1}{2}$ Bogen, der Bedingung der Aufgabe gemäß.

Eben so könnten nun auch noch die übrigen Glieder für x genommen werden. Es bedarf übrigens nur einer einzigen richtigen Proberechnung, um sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit des erhaltenen Resultats zu überzeugen. Die Uebereinstimmung der Probe mit den Bedingungen der Aufgabe bürgt für die Richtigkeit der Ausarbeitung, aber die Nichtübereinstimmung beweiset noch nicht die Unrichtigkeit der ersten Berechnung, weil auch die Proberechnung Fehler enthalten kann.

§. 48. Es ist schon bemerkt worden, daß die praktischen Rechenbücher noch manche Rechenkapitel enthalten, die hier nicht eigens abgehandelt werden. Sie sind aber nichts weiter als die Anwendung der Regel de tri auf ähnliche Fälle. Dahin zählen wir unter andern die Tara- und die Gewinn- und Verlust-Rechnung. Die Berechnung der hieher gehörigen Aufgaben hat nichts Eigenthümliches, und sie gehören sämmtlich in die einfache oder zusammengesetzte Regel de tri. Nur das Wesentliche und Wichtigste davon soll hier angemerkt werden.

Tara oder Thara, ein spanisches Wort, bezeichnet einen Abzug an Gewicht, welches für die Emballage (Umschlag, Einhülle) der Waaren, also für Kisten, Fässer, Packtuch u. s. w. gerechnet wird; Brutto

image
not
available

§. 49. Die Gewinn- und Verlust-Rechnung wird in den meisten Rechenbüchern ebenfalls besonders abgehandelt. Die Berechnung aller hierher gehörigen Aufgaben fällt aber, wie die Tararechnung, in die einfache oder zusammengesetzte Regel de tri, wo auch einige Aufgaben dieser Art vorgekommen sind. Hauptsächlich ist es nöthig, sich einige dahin gehörige Begriffe und Benennungen wohl zu merken. Was für eine Waare im Einkauf, nebst allen Kosten ausgegeben wird, heißt der Einkaufspreis; was man im Verkauf, nach Abzug der Kosten, welche oft damit verbunden sind, wieder erhält, der Verkaufspreis. Der Unterschied des Einkaufspreises vom Verkaufspreise ist entweder Gewinn oder Verlust; Gewinn, wenn der Verkauf den Einkauf übersteigt, Verlust, wenn der Verkauf niedriger ist als der Einkauf.

1) Verkauf — Einkauf = Gewinn.
2) Einkauf — Verkauf = Verlust.
3) Verkauf — Gewinn = Einkauf.
4) Verkauf + Verlust = Einkauf.
5) Einkauf + Gewinn = Verkauf.
6) Einkauf — Verlust = Verkauf.

Einkauf und Verkauf sind entweder gegeben, oder müssen erst durch Regel de tri-Ansätze berechnet werden. Die Sache ist an sich so wenig schwierig, daß auch ein wenig geförderter Rechner sie leicht begreifen kann. Nur lasse der Lehrer den Schüler durch Beispiele zu diesen einzelnen Wahrheiten gelangen. Z. B. Ich habe ein Federmesser für 5 Sgr. eingekauft und verkaufe es wieder für 7 Sgr.; wie viel habe ich gewonnen? Antw. 2 Sgr.

Aufl. Wie viel habe ich beim Verkauf dieses Federmessers gewonnen? 2 Sgr. Wie hast du diese gefunden? Indem ich 5 Sgr. von 7 Sgr. abzog. Was machten aber diese 5 Sgr. in meinem kleinen Handel aus? Den Einkauf. Was aber die 7 Sgr.? Den Verkauf. Kannst du mir nun im Allgemeinen, d. h. so, daß es auf alle Fälle dieser Art paßt, sagen, wie man den Gewinn findet, wenn Einkauf und Verkauf bekannt sind? Oder kannst du mir dein Verfahren beim Berechnen des Gewinnes allgemein bestimmen? Ich habe den Einkauf vom Verkauf abgezogen. Und was hast du da gefunden? Vielleicht wird der Schüler antworten: 2 Sgr. Dann muß der Lehrer weiter fragen: Was sind aber in diesem Handel die 2 Sgr., Gewinn oder Verlust, oder was sonst? Gewinn. Nun sage mir noch einmal, wie erfährt man den Gewinn, wenn Einkauf und Verkauf, vorausgesetzt, daß dieser höher als jener, bekannt sind? Man subtrahirt den Einkauf vom Verkauf, so erhält man den Gewinn. Auf ähnliche Weise behandle der Lehrer die übrigen vorkommenden Fälle.

§. 50. Die Aufgaben, welche in der Gewinn- und Verlustrechnung vorkommen, zerfallen, je nachdem a) der Gewinn oder Verlust, b) der Einkauf oder c) der Verkauf gesucht wird, in drei Hauptklassen. Von diesen 3 Stücken a, b, c sind immer 2 gegeben, aus welchen das dritte bestimmt werden soll. Der Gewinn oder Verlust wird aber nun wieder auf eine dreifache Weise bestimmt. Es ist nämlich dazu gegeben 1) Einkauf und Verkauf überhaupt oder 2) der Preis eines bestimmten Theils

vom Einkauf und Verkauf oder 3) der Gewinn oder Verlust Procent. Eben so können Einkauf und Verkauf auf mehrere Weise ermittelt werden.

1) Der Einkauf und Verkauf überhaupt sind gegeben, der ganze Gewinn wird gesucht. Z. B. Ein Ballen Waare wird gekauft für 145 Thl. und verkauft für 180 Thl.; wie viel beträgt der Gewinn?

Auflösung. Verkaufspreis 180 Thl.
Einkaufspreis 145 „
Gewinn 35 Thl.

Man braucht also hier nur den Einkauf vom Verkauf zu subtrahiren, um den Gewinn zu erhalten. Gesetzt aber, der Ballen wäre für 120 Thl. verkauft worden, so würde ein Verlust von 25 Thl. Statt finden.

Einkaufspreis 145 Thl.
Verkaufspreis 120 „
Verlust 25 Thl.

Um den Verlust zu erhalten, subtrahirt man also den Verkauf vom Einkauf.

2) Der Preis eines bestimmten Theils vom Einkauf und Verkauf ist gegeben, der Gewinn oder Verlust wird gesucht. Z. B. Ein Ctnr. Kaffee von 110 Pfd. wird gekauft, das Pfd. zu $7\frac{1}{2}$ Sgr. und verkauft zu 9 Sgr.; wie viel wurde gewonnen?

Verkauf 9 Sgr. jedes Pfund
Einkauf $7\frac{1}{2}$ „ „ „
Gewinn $1\frac{1}{2}$ Sgr. auf jedes Pfund.

Gewinn $110 . 1\frac{1}{2}$ Sgr. = 165 Sgr. = 5 Thl. 15 Sgr. auf 1 Centr.

Oder man sucht den Einkauf oder Verkauf überhaupt, $110 . 7\frac{1}{2}$ Sgr. = 825 Sgr. = 27 Thl. 15 Sgr. Einkauf. $110 . 9$ = 990 Sgr. = 33 Thl. Verkauf. 33 Thl. — 27 Thl. 15 Sgr. = 5 Thl. 15 Sgr. Gewinn. Wäre der Verkauf $7\frac{1}{2}$ Sgr. und der Einkauf 9 Sgr. gewesen, so würde der Verlust 5 Thl. 15 Sgr. betragen.

3) Der Gewinn oder Verlust Procent d. h. von 100 ist gegeben, der Gewinn oder Verlust überhaupt wird gesucht. Beispiel: 1 Ohm Wein wird zu 35 Thl. eingekauft, und mit 20 Proc. Gewinn wieder verkauft; wie viel beträgt der Gewinn überhaupt?

20 Proc. gewinnen, heißt: für 100 Thl. Einkauf 120 Thl. im Verkauf erhalten. Der Einkauf verhält sich also hier zum Verkauf wie 100 : 120. Daher

$$100 : 120 = 35 : x$$
$$5 : 6 = 35 : x$$
$$5x = 210$$
$$x = 42 \text{ Thl. Verkauf}$$
$$42 - 35 = 7 \text{ Thl. Gewinn.}$$

Oder 20 Proc. gewinnen, heißt: $\frac{1}{5}$ des Einkaufs gewinnen, denn 20 ist $\frac{1}{5}$ von 100. Daher: $\frac{1}{5} . 35 = 7$ Thl. Gewinn. — Oder: mit 100 Thl. wird 20 gewonnen, wie viel mit 35? Mit

image
not
available

wie 120 : 100. Daher setzen wir 120 : 100 = 150 : x, wo x oder der Einkauf = 125 Thl. Bei 20 Procent Verlust hätte sich der Verkauf zum Einkauf verhalten wie 100 — 20 : 100 oder 80 : 100, weil der Einkauf dann größer war als der Verkauf. Der Dreisatz 80 : 100 = 150 : x gibt 187½ Thl. als die Einkaufssumme.

7) Der Gewinn oder Verlust überhaupt und zugleich Proc. ist gegeben; der Einkauf wird gesucht. Beispiel: Eine Waare wurde mit 15 Proc. Gewinn verkauft und der Gewinn überhaupt betrug 120 Thl.; wie viel kostet die Waare im Einkauf? Der Gewinn verhält sich hier zum Einkauf wie 15 : 100. Daher erhalten wir den Einkauf, wenn wir setzen 15 : 120 = 100 : x, wo sich für x 800 Thl. ergibt. Hätte der Verlust 120 Thl. und 15 Proc. betragen, so würde sich ebenfalls 800 Thl. als Einkauf ergeben haben, weil zu 15 Thl. Verlust ebenfalls 100 Thl. Einkauf gehörten.

8) Der Gewinn oder Verlust überhaupt und zugleich Proc. ist gegeben, der Verkauf wird gesucht. Beispiel: Eine Waare wurde mit 20 Proc. Gewinn verkauft, und überhaupt 100 Thl. gewonnen, wie viel betrug der Verkauf? Gewinn und Verkauf verhalten sich hier wie 20 : 120. Daher setzen wir 20 : 100 = 120 : x. Der Verkauf x ist 600 Thl. Wäre der Verlust 20 Proc. und überhaupt 100 Thl., so müßten wir setzen: 20 : 100 = 100 : x, wo x = 500 Thl. der Einkauf. Der Verkauf wird nun sein: 100 : 80 = 500 : x, wo x = 400 Thl. Verkauf. Da sich hier der Verlust zum Verkauf verhält wie 20 : 80, so könnte man kürzer setzen:

Verlust. Verkauf.
20 : 80 = 100 : x
x = 400 Verkauf.

9) Kommt die Zeit mit in Betracht, während welcher sich Gewinn oder Verlust ergeben hat, so entsteht noch eine besondere Art von Aufgaben, welche in die zusammengesetzte Regel de tri einschlagen. Der Kaufmann pflegt den Gewinn oder Verlust häufig von 100 (p. c., procent), auch wohl von 100 für 1 Jahr (p. c. p. a., das heißt procento pro anno) anzugeben. Daher wird denn auch der Gewinn- oder Verlust-Procent entweder für eine bestimmte Handelszeit oder für 1 Jahr berechnet. Beispiel: a) A kauft 12 Malter Weizen, das Malter zu 6 Thl., verkauft nach 8 Monaten das Malter zu 7½ Thl., wie viel hat er Procent jährlich gewonnen?

Auflösung. 7½ : 12 M. = 90 Th. Verkauf
6 : 12 M. = 72 : Einkauf
18 Thl. Gewinn für 8 Monat.

Nun schließen wir: mit 72 Thl. (Auslage) wurden in 8 Monaten 18 Thl. gewonnen, wie viel mit 100?

72 : 100 = 18 : x
x = 25 Procent.

image
not
available

$$\frac{250}{3^3/_4} = \frac{1000}{15} = 66^2/_3 \text{ Thl.} = \text{Einkauf}$$

$$\frac{250}{3^1/_3} = \frac{750}{10} = 75 \text{ Thl.} = \text{Verkauf.}$$

$75 - 66^2/_3 = 8^1/_3$ Thl. Gewinn

$66^2/_3 : 100 = 8^1/_3 : x$

$12^1/_2$ Proc. Gewinn.

11) 500 Pfund werden gekauft, $6^2/_3$ Pfund für 1 Thl., im Verkauf werden $7^1/_2$ Pfund für 1 Thl. gegeben; a) wie viel beträgt der Verlust überhaupt? b) Wie viel an 100?

$$\frac{500}{6^2/_3} = \frac{1500}{20} = 75 \text{ Thl. Einkauf}$$

$$\frac{500}{7^1/_2} = \frac{1000}{15} = 66^2/_3 \text{ Thl. Verkauf}$$

$8^1/_3$ Thl. der Verlust.

$75 : 100 = 8^1/_3$ Thl. : x

$11^1/_9$ Proc. Verlust.

12) 10 Ellen Band werden für 1 Thl. gekauft, und im Verkauf $12^1/_2$ Proc. verloren; wie viel Ellen wurden für 1 Thl. gegeben?

$100 : 112^1/_2 = 10 : x$

$11^1/_4$ Ellen.

13) A verkauft für 100 Thaler Waare mit 50 Proc. Gewinn; wie viel kostete dieselbe im Einkauf?

$150 : 100 = 100 : x$

$66^2/_3$ Thl. im Einkauf.

14) 100 Pfund werden für 75 Thl. gegen baare Zahlung gekauft; es werden beim Verkauf 6 Monat Credit mit 5 Proc. jährlichen Zinsen gegeben, und man will 20 Proc. gewinnen; wie viel Pfund wird man demnach für 1 Thl. geben können?

? : 1 Thl.

$102^1/_2$: 100 wegen halbjährl. Zinsen

120 : 100 = Gewinn

75 : 100 Pfund

1 Pfund $2^{254}/_{360}$ Loth.

§. 51. Schlußbemerkungen zu der Lehre von den Proportionen und der Regel de tri.

Zusammengehörige Verhältnisse können wir uns in einem ursachlichen Zusammenhange denken, so daß das eine Verhältniß von dem andern bestimmt wird, und alle nothwendig von einander abhangen. Die Art dieser Abhängigkeit ist aber verschieden, und es gibt Fälle, in welchen Verhältnisse einander nach ganz andern Gesetzen bestimmen, als die sind, welche wir bisher kennen lernten. Die Berechnung der vorhergehenden Proportions-Aufgaben beruht auf folgenden Grundsätzen:

image
not
available

das Verhältniß der Zeiten zu einander sein wie 1 zu 10 oder mit andern Worten, der Stein würde in 10 Sekunden durch eine Höhe von 150 Fuß fallen. Dieß ist aber ganz falsch, in 10 Sekunden fällt er durch einen Raum von 10 . 10 . 15 = 1500 Fuß, und um durch eine Höhe von 150 Fuß zu fallen, bedarf der Stein nur stark 3 Sekunden.

2) An einem, mit Wasser gefüllten Gefäße wird der Kranen geöffnet und es fließt in der ersten Minute 10 Maß Wasser aus demselben; wie viel Maß werden in 5 Minuten daraus fließen?

Der flüchtige Rechner schließt gleich: in 5 Minuten wird auch die fünffache Menge Wasser ausfließen und er wird den Umstand nicht beachten, daß das Wasser, wegen des mit jedem Augenblick mehr verminderten Drucks der Wassermasse, immer langsamer aus dem Kranen strömt.

3) Die Größe des Mondes verhält sich zur Größe der Erde ungefähr wie 1 zu 50; wie viel größer wird unsere Erde auf dem Monde erscheinen als der Mond uns?

Ein Schüler, welcher noch nichts von der Berechnung des Rauminhalts und des Inhalts der Oberfläche einer Kugel versteht, wird leicht die irrige Antwort geben: 50mal, da doch die richtige Berechnung antwortet: ungefähr 14mal.

4) Ein geschliffener Diamant von 1 Karat schwer wurde mit 120 Gulden bezahlt; wie theuer wird ein geschliffener Diamant von 4 Karat sein? Antw. Weit mehr als 4mal so theuer, nämlich ungefähr 1200 bis 1500 Gulden.

5) Jemand läßt einen Brunnen graben. Am ersten Tage graben die Arbeiter ein Loch von 80 Kubikfuß; wie viel Kubikfuß werden sie in 6 Tagen graben? Läßt sich nicht bestimmen, da dieß von dem mehr oder weniger festen Gestein abhängt.

6) Aus einem Bergwerk erhielten 4 Bergleute in 1 Jahr für 1500 Thaler Silber; a) wie groß wird die Ausbeute in 10 Jahren sein? b) Wie hoch würde sich die Ausbeute belaufen, wenn man 8 Bergleute anstellte?

Weder a noch b kann berechnet werden, weil die Ergiebigkeit des Bergwerks zunehmen oder abnehmen kann.

7) Ein Luftballon stieg in 2 Minuten 2500 Fuß hoch; wie hoch wird er in einer Stunde steigen? — Läßt sich nicht bestimmen, weil überhaupt der Ballon nicht ununterbrochen 1 Stunde lang steigt, zum andern, weil die Schnelligkeit des Steigens mit zunehmender Höhe abnimmt.

8) Ein Knabe bindet eine Schnur, an welcher unten eine bleierne Kugel befestigt ist, so, daß sie frei schwingen kann. Er zählte nun in 1 Minute 100 Schwingungen; wie viel Schwingungen wird er in derselben Zeit zählen, wenn er die Schnur um die Hälfte verkürzt? — Nicht 50, auch nicht 200. Die Anzahl der Schwingungen verhält sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen, also wie $\sqrt{1}$ zu $\sqrt{2}$. Sollte die Schnur doppelt so viel Schwingungen machen, so müßte sie $^1/_4$ der ersten Länge haben.

9) Ein Schiff segelte in 2 Stunden 3 Meilen weit, wie viel Meilen wird

image
not
available

gewöhnlich von 100 (pro cento, pr. c., prc., p. c.) bestimmt und betragen dann gewöhnlich 4 oder 5. Sowohl die Summe 100 als auch der Zinsbetrag davon werden unbenannt angegeben, und bezeichnen dann jede Münzsorte, nur daß man sie jedesmal gleichnamig annehmen muß. Hat z. B. Jemand Geld geliehen, etwa 1000 Pistolen zu 5 Proc., so können 100 zu 5 hier die Bedeutung Pistolen haben; wäre das Kapital 1000 Thl., so würden 100 zu 5 auch Thaler bezeichnen, d. h. von 100 Thl. muß man 5 Thl Zinsen geben. Wäre die Summe Silbergroschen, so müßte ich denken, von 100 Sgr. bezahlt man 5 Sgr. Zinsen. So wird durch 100 zu 5 oder 4 das Verhältniß des Kapitals zum Zins angedeutet. Die Bestimmung, wie viel der jährliche Zins von 100 beträgt, wird der Zinsprocent genannt; bestimmt man die Zinsen vom Kapital 1, so nennt man dieß den Zinsfuß. Das reine Kapital, ohne Zinsen, wird der baare oder gegenwärtige Werth genannt, mit den Zinsen der künftige Werth. Früher, da weniger Geld im Umlauf war, stand der Zinsfuß höher als jetzt, im Mittelalter 10 bis 12 proc., doch wurde er schon vor einigen Jahrhunderten in Deutschland gesetzlich auf 5 von 100 bestimmt. Es gibt aber harte und ungerechte Menschen, welche die Noth ihres Nächsten benutzen und demselben Geld in weit höherem Zinsfuß leihen. Solche Leute, welche auf diese oder ähnliche Weise andere Menschen übervortheilten, nennt man Wucherer und der übermäßige hohe Zins oder der, durch die Noth anderer Menschen erworbene übermäßige Vortheil heißt Wucher. Im bürgerlichen Verkehr wird jetzt bei uns 4 oder 5 Proc. gerechnet, und diesen Zinsfuß darf niemand überschreiten, oder er verfällt in Strafe, und muß den Namen eines harten gefühllosen Menschen tragen. Nur in Wechselgeschäften rechnen die Wechsler (Banquier) gewöhnlich 6 Proc., welches ihnen auch ihre besonderen Verhältnisse gestatten. Eine andere Art von Geldverehrern hält im Augenblick des Darleihens schon die, über ein Jahr erst fälligen Zinsen zurück. Z. B. Ich leihe von einem Geizhals 1000 Thl. zu 5 Proc., so giebt er mir baar 950 Thl. 50 Thl. nimmt er schon zum Voraus als Zins von 1000 Thl. Dennoch bin ich ihm nicht allein ein Kapital von 1000 Thl. schuldig, sondern ich muß ihm auch von dieser Summe Zinsen bezahlen. Verträgt sich das auch mit dem Christenthume?

Der Zinsfuß wird gewöhnlich von 1 Jahr berechnet (für 1 Jahr, pro anno, pr. a., p. a.), so wie auch die Zinsen meistens jährlich bezahlt werden. Sagt man, ein Kapital stehe zu 4 Proc. verzinset, so versteht man darunter, daß jährlich von 100 Thaler oder Sgr. oder Pfg. 4 Thl. oder Sgr oder Pfg. Zinsen bezahlt werden. Wird aber der Zinsfuß nach einem andern Zeitabschnitte bestimmt, so muß diese Zeit auch jedesmal bemerkt werden. In vielen Fällen wird auch wirklich der Zinsfuß von 1 Monat bestimmt, und mancher Reiche läßt sich die Zinsen halbjährlich bezahlen. Kann der Schuldner (Debitor) die Zinsen nicht zur bestimmten Zeit entrichten, so zählt sie mancher Gläubiger (Creditor) zum Kapitale und verzinset sie mit demselben. Z. B. Wenn A von B 1000 Thl. zu 5 Proc. geliehen, so muß A nach Verlauf eines Jahres 50 Thl. Zinsen bezahlen. Kann er dieß nicht, so schreibt B diese 50 Thl. zum Kapital. Statt 1000 Thl. beträgt nun das Kapital 1050 Thl. und B muß jetzt von dieser letzten Summe die Zinsen abtragen. Wäre betragen die jährlichen Zinsen 50, jetzt aber, wegen des vermehrten Kapitals $52^1/_2$ Thl. Kann A nach einem Jahre diese ebenfalls nicht bezahlen, so schreibt B auch diese wieder zum Kapitale, welches jetzt $1000 + 50 + 52^1/_2 = 1102^1/_2$ Thl. ausmacht. B rechnet also hier außer den Kapitalzinsen noch Zins von Zins und dieß wird Zinseszins genannt. Indeß darf dieß ohne besondere Uebereinkunft zwischen Creditor und Debitor nicht geschehen. Die Staatsgesetze verbieten im Allgemeinen den Zinseszins; doch kommt er bei Wittwenkassen, Sparkassen, Lebensversicherungsanstalten und ähnlichen Einrichtungen in Anwendung. Auch der Vormund darf die Kapitalien seiner Pupillen (Unmündigen) auf Zinseszins anlegen. Durch Zinseszins kann ein kleines Kapital in einer langen Reihe von Jahren zu einer außerordentlich großen Summe anwachsen, wovon wir nachher einige Beispiele anführen werden. Nach dem Unterschiede von einfachem und zusammengesetztem Zins oder Zinseszins theilt man auch die Zinsrechnung in die einfache und zusammengesetzte. Zwischen beide wollen wir noch die einfache Rabattrechnung einschalten, und die zusammengesetzte Zins- und Rabatt-Rechnung wegen ihrer Verwandtschaft, in einem und demselben Abschnitt abhandeln.

image
not
available

1250 sind, so viel Thl. Zinsen erhält man. 25 ist in 100 viermal, in 1200 zwölfmal 4 oder 48mal und in 1250 50mal.

Schriftlich. $100 : 1250 = 4 : x$

$$10 : 125 = 4 : x$$

$$x = \frac{4 \times 125}{10} = 50 \text{ Thl.}$$

Anmerkung. Von 1 Thl. beträgt der Zins zu 5 Proc. $1^1/_2$ Sgr., zu 4 Proc. $1^1/_5$ Sgr. oder 1 Sgr. $2^2/_5$ Pf., zu $3^1/_4$ Proc. $1^1/_8$ Sgr.; dadurch läßt sich die Berechnung bei unbequemen, untheilbaren Zahlen sehr erleichtern. Z. B.

3) Wie viel betragen die Zinsen von 1719 Thl. a) zu 5 Proc.? b) zu 4 Proc.? c) zu $3^3/_4$ Proc.?

Auflösung. Mündlich. $1719 = 1000 + 700 + 10 + 9$. Der Zins von 1000 Thl. = 50, von 700 = 35, von 10 = $^1/_2$ Thl. oder 15 Sgr., von 9 Thl. = $9 \times 1^1/_2$ Sgr. = $13^1/_2$ Sgr. Der sämmtliche Zins von 1719 Thl. ist also $50 + 35$ Thl. $+ 15$ Sgr. $+ 13^1/_2$ Sgr. = 85 Thl. $28^1/_2$ Sgr. — Man hätte auch die Zinsen von 1720 berechnen und davon $1^1/_2$ Sgr. abziehen können. — Zu 4 Proc. ist der Zins von 1000 Thl. = 40, von 700 = 28, von 10 Thl. = $^{10}/_{25} = ^2/_5 = 12$ Sgr., von 9 Thl. = $9 \times 1^1/_2$ Sgr. = $10^1/_2$ Sgr., macht zusammen 40 Thl. + 28 Thl. + 12 Sgr. + $10^1/_2$ Sgr. = 68 Thl. $22^1/_2$ Sgr. — Zu $3^3/_4$ Proc. ist der Zins von 1000 Thl. = $10 \times 3^3/_4 = 37^1/_2$, von 700 = $7 \times 3^3/_4 = 26^1/_4$, von 10 Thl. = der zehnte Theil von $3^3/_4$ Thl., oder $112^1/_2$ Sgr. = $11^1/_4$ Sgr., von 9 Thl., = $9 \times 1^1/_8$ Sgr. = $10^1/_8$ Sgr., macht zusammen $37^1/_2 + 26^1/_4$ Thl. + $11^1/_4$ Sgr. + $10^1/_8$ Sgr. = $63^3/_4$ Thl. + $21^3/_8$ Sgr. = 63 Thl. + $22^1/_2$ Sgr. + $21^3/_8$ Sgr. = 63 Thl. + $43^7/_8$ Sgr. = 64 Thl. $13^1/_8$ Sgr. — Schriftlich hat die Auflösung keine Schwierigkeit.

4) Jemand nahm von einem Kapital, welches zu 5 Proc. verzinset war jährlich $42^1/_2$ Thl. Zinsen ein; wie groß war das Kapital?

Auflösung. Mündlich. Von 100 Thl. 5 Thl. Zins = von 20 Thl. 1 Thl. Zu 1 Thl. Zins gehören 20 Thl. Kapital, also werden zu $42^1/_2$ Thl. Zins auch $20 \times 42^1/_2$ Thl. = 850 Thl. Kapital gehören.

Schriftlich. Zu 5 Thl. Zins gehört ein Kapital von 100 Thl., zu $42^1/_2$ Thl. Zins wird also ein größeres Kapital erfordert werden. Daher eine zunehmende Proportion. $5 : 42^1/_2 = 100 : x$ u. s. w.

5) Wie groß ist das Kapital, welches zu 4 Proc. jährlich 54 Thl. Zinsen einbringt?

Auflösung. a) Mündlich. Zu 4 Thl. Zinsen gehören 100 Thl. Kapital, also zu 1 Thl. 25, daher zu 54 Thl. $54 \times 25 = 25 \times 50 + 25 \times 4 = 1250 + 100 = 1350$; oder da 25 ein Viertelhundert ist, so hat man hier 54 Viertelhundert = $13^1/_2$ Hundert = 1350 Thl.

b) Schriftlich. $4 : 54 = 100 : x$. Antw. 1350 Thl.

6) E nahm von 640 Thl. jährlich 32 Thl. Zinsen ein, wie hoch standen diese proc. verzinset?

image
not
available

7 Thl. hinzuzufügen. Zu 5 Proc. beträgt der jährliche Zins von 1 Thl. $^1/_{20}$ Thl., von 7 Thalern also $7 \times {}^1/_{20} = {}^7/_{20}$ und in 4 Jahren $4 \times {}^7/_{20} = {}^{28}/_{20} = 1^8/_{20} = 1^2/_5$, zu obigen 250 gezählt $= 251^2/_5$

b) Schriftlich. Von 1250 Thl. erhält man gewiß mehr Zinsen als von 100 Thl., daher müssen beide Glieder in einem zunehmenden Verhältnisse stehen: 100 : 1250. Die 5 Proc. werden immer von 1 Jahr verstanden; von 4 Jahren wird der Zins mehr betragen als von 1 Jahr, daher wieder ein zunehmendes Verhältniß: 1 : 4. Die zu suchenden Zinsen x bilden mit 5 Thl. Zins ein Verhältniß. Der Ansatz ist also:

$$\left.\begin{matrix} 100 : 1250 \\ 1 : 4 \end{matrix}\right\} = 5 : x \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} 100 : 1250 \\ 1 : 4 \\ x : 5 \end{matrix}$$

Anmerkung. Bei Kindern von geringem Fassungsvermögen lasse der Lehrer, wie früher bemerkt, solche Aufgaben durch zwei einfache Regel de tri-Sätze auflösen. 1 Jahr : 4 Jahr $=$ 5 Thl. Zinsen : x, d. h. in 1 Jahr erhält man von 100 Thl. 5 Thl. Zinsen, also in 4 Jahr auch $4 \cdot 5 = 20$ Thl.

Dann 100 : 1250 = 20 : x

5 : 1250 = 5 : x

$x = 250$

2) Von einem Kapital, welches zu 4 Proc. verzinset war, wurden in $3^1/_2$ Jahren 105 Thl. Zinsen eingenommen; wie groß war das Kapital?

Auflösung. a) Mündlich. In $3^1/_2$ Jahren 105 Thl. ist eben so viel als in 7 Jahren 210 Thl. oder als in 1 Jahr 30 Thl. Zu 4 Proc. ist das Kapital 25mal so groß als die Zinsen sind, also wird das Kapital sein $= 25 \times 30 = 750$ Thl.

b) Schriftlich. Wenn zu 4 Thl. Zinsen 100 Thl. Kapital gehört, so wird zu 105 Thl. Zinsen gewiß ein größeres Kapital gehören; daher müssen hier die Zinsen in einem zunehmenden Verhältnisse stehen: 4 : 105. Auch ist es leicht zu begreifen, daß zu denselben Zinsen das Kapital, welches $3^1/_2$ Jahr ausstehet, kleiner sein muß, als wenn es nur 1 Jahr verzinset ist. Daher steht hier die Zeit in einem abnehmenden Verhältnisse: $3^1/_2 : 1$. Das zu suchende Kapital x wird mit dem gegebenen Kapital 100 in ein Verhältniß gesetzt. Also:

$$\left.\begin{matrix} 4 : 105 \\ 3^1/_2 : 1 \end{matrix}\right\} = 100 : x \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} 4 : 105 \\ 3^1/_2 : 1 \\ x : 100 \end{matrix}$$

$x = 750$ Thl. $\qquad x = 750$ Thl.

oder

$3^1/_2 : 105$

30 Thl. jährlich

$4 : 30 = 100 : x$

$1 : 30 = 25 : x$

$x = 750$ Thl.

3) Ein Kapital von 690 Thl. hat in $3^1/_3$ Jahren 115 Thl. Zinsen eingebracht; wie hoch proc. stand es jährlich verzinset?

image
not
available

$$\left.\begin{array}{r} 840 : 100 \\ 3\frac{1}{3} : 210 \end{array}\right\} = 1 : x \text{ oder } \begin{array}{r} 840 : 100 \\ 3\frac{1}{3} : 210 \\ x : 1 \end{array}$$

$x = 7\frac{1}{2}$ Jahr. $\qquad$ $x = 7\frac{1}{2}$ Jahr.

Oder; $3\frac{1}{3} : 210$

63 Jahre, in welchen 100 Thl. diese Zinsen einbringen würden. 200 Thl. würden in der Hälfte dieser Zeit $= 31\frac{1}{2}$, 400 Thl. in $\frac{1}{4} \cdot 63 = 15\frac{3}{4}$ Jahren diese Zinsen einbringen. Daher je größer das Kapital, desto kleiner die Zeit; die Verhältnisse wirken hier umgekehrt. Aus diesem Grunde setzen wir hier:

$$\begin{array}{r} 840 : 100 = 63 : x \\ \hline 40 : 100 = 3 : x \\ \hline 4 : 10 = 3 : x \\ \hline x = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

5) Von 360 Thl. nahm jemand in $2\frac{1}{2}$ Jahren 45 Thaler Zinsen ein; wie viel beträgt demnach der Zins von 1440 Thl. in dieser Zeit? Antw. 180 Thl.

Ansatz. $\begin{array}{r} 360 : 1440 \\ x : 45 \end{array}$ oder $\begin{array}{r} 360 : 1440 \\ 4 \\ 45 \\ \hline 180 \text{ Thl.} \end{array}$

6) 720 Thl. brachten in $7\frac{1}{2}$ Jahren 270 Thl. Zinsen ein; wie groß wird das Kapital sein, welches bei gleichem Zinsfuß in $2\frac{1}{2}$ Jahren 40 Thl. Zinsen einbringt? Antw. 320 Thl.

Ansatz. $\begin{array}{r} 2\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} \\ 270 : 40 \\ x : 720 \end{array}$

7) Von 850 Kronenth. hat man jährlich zu 4 proc. 34 Kronenth. Zinsen eingenommen; wie hoch proc. müssen 10200 Kronenth. verzinset werden, wenn man jährlich 510 Kronenth. Zinsen einnehmen will? Antw. 5 Proc. Ansatz. $\begin{array}{r} 10200 : 850 \\ 34 : 510 \\ x : 4 \end{array}$

8) Von 1500 Thl. hatte man in $4\frac{1}{2}$ Jahren $337\frac{1}{2}$ Thl. Zinsen eingenommen; wie lange werden 3600 Thl. ausstehen müssen, um $67\frac{1}{2}$ Thl. Zinsen einzubringen? Antw. $\frac{3}{8}$ Jahr.

Ansatz. $\begin{array}{r} 3600 : 1500 \\ 337\frac{1}{2} : 67\frac{1}{2} \\ x : 4\frac{1}{2} \end{array}$

oder:

$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{2} : 327\frac{1}{2} \\ \hline 75 \text{ Thl. jährlich} \\ 1500 : 3600 = 75 : x \\ \hline 180 \text{ Thl. jährlich} \\ 180 : 67\frac{1}{2} = 1 \text{ Jahr} : x \\ \hline x = \frac{135}{360} = \frac{3}{8} \text{ Jahr.} \end{array}$$

image
not
available

Nach b ergibt sich: 500 Thl. zu 4 Proc. = 2000 zu 1 Proc. und 800 Thl. zu 5 Proc. = 4000 zu 1 Proc.

Nach c aber sind 2000 Thl. auf 6 Monate = 12000 auf 1 Monat und 4000 auf 7 Monate = 28000 auf 1 Monat. Daraus können wir den richtigen Schluß ziehen, daß 12000 Thl. zu 1 Proc. in 1 Monat eben so viel Zinsen einbringen werden, als 500 Thl. zu 4 Proc. in 6 Monaten, desgleichen daß man von 28000 zu 1 Proc. in 1 Monat so viel Zinsen erhält, als von 800 Thl. zu 5 Proc. in 7 Monaten.

§. 56. Daraus ergeben sich nun für den Rechner folgende Regeln: Für

a) Bei gleicher Zeit, gleichem Zinsfuß und ungleichen Kapitalien ist die Summe der Zinsen von den einzelnen Kapitalien gleich den Zinsen von der Summe der Kapitalien.

b) Die Zinsen von ungleichen Kapitalien, bei ungleichem Zinsfuß und gleicher Zeit, sind gleich den Zinsen eines Kapitals zu 1 Proc., welches entsteht, wenn man jedes gegebene Kapital mit seinen Zinsen procent multiplicirt, und diese Produkte addirt.

c) Bei ungleichen Kapitalien, ungleicher Zeit und gleichem Zinsfuß erhält man die sämmtlichen Zinsen, wenn man jedes Kapital mit seiner (bei allen Kapitalien auf dieselbe Benennung gebrachten) Zeit multiplicirt, die Summe dieser Produkte als ein für eine bestimmte Zeiteinheit verzinstes Kapital ansieht, welches mit jenen auf ungleiche Zeit ausstehenden Kapitalien gleiche Zinsen einbringt.

d) Bei ungleichem Zinsfuß und ungleicher Zeit sind die Zinsen verschiedener Kapitalien gleich den Zinsen, welche sich ergeben, wenn man jedes einzelne Kapital mit seiner Zeit, und jedes dieser Produkte mit seinem Zinsprocent multiplicirt, die Summe dieser letzten Produkte als ein Kapital zu 1 Proc. für eine bestimmte Zeiteinheit betrachtet und davon die Zinsen berechnet.

Anmerkung. Der Lehrer halte die im Rechnen ziemlich geförderten Schüler dazu an, ähnliche einzelne Fälle unter eine allgemeine Regel zu bringen. Es ist eine treffliche Denkübung, das Besondere zum Allgemeinen, die einzelnen Begriffe zu einem Allgemeinbegriffe erheben zu lassen. Es ist aber auch leicht einzusehen, daß diese Denkübung nicht früh, nicht in den ersten Schuljahren vorgenommen werden darf. Das Kind muß erst reich sein an einzelnen Erfahrungen, ehe es sich zum Allgemeinen erheben kann. Die Natur führt das Kind selbst zum Allgemeinen. Erscheinen ihm gewisse Dinge immerfort mit übereinstimmenden Merkmalen, so vereinigt es dieselben in Gedanken zu Dingen Einer Art, zu Gattungen, Klassen, zu Allgemeinbegriffen oder vielleicht besser zu Begriffen, weil jeder Begriff etwas Allgemeines enthält und Allgemeinbegriffe gesteigerte Begriffe sind, zu welchen sich der Mensch so früh nicht erhebt. Der Lehrer darf

image
not
available

5000
7000
12000 : 5000 = 3 Mon. : x

x = $1^1/_4$ M. 7000 zu rücken
also $1^3/_4$ M. 5000 " "

1. März + $1^3/_4$ M. = $22^1/_2$ April, d. h. der 23. April.

Jetzt berechnen wir 12000 gegen 8000. Vom 23. April bis 15. Oktober sind 5 Mon. 22 Tage = $5^{11}/_{15}$ M.

12000
8000
20000 : 12000 = $5^{11}/_{15}$: x

x = 3 M. $13^1/_5$ T., d. h. 3 M. 14 Tage.

5 Mon. 22 Tage
3 " 14 für 8000 Thl.
2 " 8 für 12000
3 " 23
6 " 1 Tag

müssen die 12000 Thl. vom Anfang des Jahres abstehen, d. i. der 1. Juli. — 3 Monat 14 Tage vom 15. Oktober an rückwärts gezählt, trifft ebenfalls auf den 1. Juli. Ständen die drei Kapitalien auch noch zu verschiedenen Procenten verzinset, so müßten wir sie alle auf 1 Proc. stellen, nämlich:

5000 zu 4 Proc. = 20000 zu 1 Proc.
7000 " 5 " = 35000 " " "
8000 " $4^1/_2$ " = 36000 " " "

Jetzt wird die Berechnung der Versetzungszeit nach 20000, 35000, 36000 Thl. vorgenommen, wie vorher.

20000 + 35000 = 55000 : 20000 = 3 M. : x

x = $1^1/_{11}$ Mon. für 7000 Thl.
3 — $1^1/_{11}$ = $1^{10}/_{11}$ Mon. für 5000 Thl.

Die Versetzung fällt auf den 28. April. Jetzt rechnen wir 55000 + 36000 = 91000 : 55000 = $6^{17}/_{30}$ M. : x. (Vom 28. April bis den 15. Nov. sind $6^{17}/_{30}$ Monat,) x ist hier sehr nahe 4 Mon. 36000 erhalten also eine Versetzungszeit von 4 Monaten und 55000 Thl. von $2^{17}/_{30}$ Mon. Jene vorwärts vom 28. April und diese rückwärts vom November gezählt, fallen auf den 28. August, als den wahren mittleren Zahlungstermin.

Schlußbemerkung.

In der Zeitschrift: „Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, oder kritische Bibliothek, Bd. IX., Heft 9." bemerkt Herr Wunder bei Gelegenheit seiner Recension dieses methodischen Handbuchs und der Rechenkunst von Götz Folgendes über die Berechnung des mittleren Zahlungstermins:

„Der mittle(re) Zahlungstermin kann nur durch Hülfe der Rabattrechnung so „bestimmt werden, daß keiner von beiden Interessenten im Nachtheile ist, woraus „aber zugleich folgt, daß der Zinsfuß nicht unberücksichtigt bleiben darf, auch wenn „er für alle Kapitalien derselbe ist. Z. B. für die S. 158 (in Götzens Rechen„kunst) vorgelegte Aufgabe: Jemand hat 601 Thl. in 3 Monaten, 500 Thl. in „4 Monaten, 155 Thl. in 2 Monaten zu bezahlen; zu welcher Zeit kann er die „ganze Summe 1256 Thl. auf einmal bezahlen, ohne Nachtheil des einen oder

image
not
available

C Nach specieller Berechnung jedes Kapitals

100 : 1000 Thl.
12 : 4 Mon.
x : 4 Thl.
$13^1/_3$

100 : 3000 Thl.
12 : 18 Mon.
x : 4 Thl.
180 Thl.

100 : 2000 Thl.
12 : 9 Mon.
x : 4 Thl.
60 Thl.

180 Thl.
60 z
$13^1/_3$ z
$253^1/_3$ Thl. Zinsen.

Hiermit stimmt die Berechnung von A nach der alten Methode überein, mithin ist diese richtig und die bei B falsch.

Wenn aber Herr W. unmittelbar vor der angeführten Stelle sagt: „Herr G. „(Gös) gründet die Berechnung des mittlen(leren) Zahlungstermins auf die An„nahme, daß es gleichgültig sei, ob Jemand z. B. 500 Thl. 4 Monat lang oder „4 mal 500 Thl. = 2000 Thl. einen Monat lang nutze; aber eben diese An„nahme ist falsch, da bei Schätzung des Nutzens eines Kapitals nicht allein die „Menge der Zinsen, sondern auch der Zeitraum, in welchem sie gewonnen „werden, zu berücksichtigen ist. Nach derselben Annahme wäre es auch gleichgültig, „ob Jemand 10000 Thl. auf ein Jahr oder 1000 Thl. auf 10 Jahr zu 5 Proc. „jährl. Zinsen einem andern leihet, was offenbar nicht ist, da er im ersten Falle „500 Thl. am Ende des ersten Jahres, im zweiten Falle aber nur nach und nach „am Ende jedes der nächsten 10 Jahre 50 Thl. erhält" — so hat er nur bedingter Weise recht. Daß 1000 Thl. in 10 Jahren so viel Zinsen einbringen als 10000 Thl. in 1 Jahr, hat allerdings seine Richtigkeit; wenn Herr W. neue Kräfte ins Spiel bringt, die der Berechnung fremd sind, so werden die Ergebnisse gewiß verschieden sein müssen.

Kapitalien sind als Kräfte anzusehen, welche in einer bestimmten Zeit eine bestimmte Wirkung (= Zinsen) hervorbringen, und die Größe dieser Wirkung ist abhängig von dem Produkte aus Kapital und Zeit. Bei verschiedenen Kapitalien (Kräften) und Zeiten verhalten sich die Zinsen (Wirkungen) der Kapitalien, wie die Produkte aus den Kapitalien und Zeiten.

Nach dem angeführten Beispiel sei 1000 Thl. = K und 10000 Thl. = 10 K die Zeit, in welcher 10 K verzinset ist = z und die Zeit für K = 10 z so ist

10 K . z = K . 10 . z

d. i. z (10 K) = z (10 K).

d. h. die Wirkungen sind hier einander gleich.

Es versteht sich von selbst, daß der kluge Geschäftsmann die baare Zahlung von 10000 Thl., den einzelnen jährlichen Zahlungen von 1000 Thl. vorzieben wird; aber mit dieser pekuniären Spekulation hat die Arithmetik nichts zu schaffen.

Neunter Abschnitt.

§. 58. Von der Rabattrechnung.

Rabatt, vom dem italienischen Worte **Rabatto**, heißt der wörtlichen Bedeutung nach so viel als Abzug, Kürzung, und wird in vielen Fällen mit dem ebenfalls italienischen Worte **Disconto** oder **Sconto**, im Französischen **Discompte** oder **Disconte** gleichbedeutend genommen. Wenn ein Kapital vor der Verfallzeit, oder Waaren vor dem festgesetzten Zahlungstermin bezahlt werden, so wird dem Schuldner etwas von der Schuldsumme nachgelassen, und diesen Abzug an Geld, welcher wegen Vorausbezahlung gestattet wird, nennt man Rabatt. Die Geldsumme selbst heißt der künftige

image
not
available

Die Wechsler und Kaufleute machen aber hievon keinen Gebrauch; sie rechnen fast allgemein den Rabatt in 100 (100 : 100 — 5 oder 100 : 95). Sie wollen den, vom Zinsfuß hergenommenen Bestimmungsgrund im Handel nicht anerkennen. Allerdings verhält sich die Sache in den Handelsgeschäften anders. Der Kaufmann rechnet in der Regel einen weit höhern Gewinn als 5 Proc. und der kleine Nachtheil, welcher auf der einen Seite durch die Berechnung des Rabatts in 100 entsteht, ist gegen den Vortheil der baaren Zahlung wenig zu achten. Ueberdieß wird durch die fast allgemeine Annahme des Rabatts in 100, Vortheil und Nachtheil gegen einander ausgeglichen. Im Waarenhandel wird die Zahlung gewöhnlich auf Ziel von 2, 8, 10 bis 12 Monaten bestimmt; entschließt sich aber der Käufer, gleich baar zu bezahlen, so wird ihm 5, $7\frac{1}{2}$ bis 10 Proc. Rabatt zugestanden, welcher dann immer in 100 berechnet wird. Die Kaufleute und Wechsler nennen solchen Rabatt auch wol Diskonto, und das Abkürzen diskontiren. Gesetzt M hätte einen Wechsel von 1000 Gulden in Händen, der aber erst über 4 Monate zahlfällig wäre; er bedürfe jetzt baares Geld, so sucht er diesen Wechsel gegen baare Zahlung an N mit $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ Proc. monatlichen Abzug (Diskonto) zu verhandeln. Hier wird ebenfalls in 100 rabattirt oder diskontirt. Da dieser Abzug nach Uebereinkunft zwischen Käufer und Verkäufer bestimmt wird, so fällt die obige Bestimmung der Vorausbezahlung nach dem Zinsfuß von selbst weg, und man kann daher nicht sagen, daß der Kaufmann im Irrthum sei, wenn er den Rabatt in 100 berechnet. Wie verkehrt aber die Berechnung des Rabatts in 100 außer dem Handel und den Wechselgeschäften ist, das zeigt sich klar, wenn etwa die Vorausbezahlung eine Zeit von 20 oder 25 Jahren betrifft. Z. B. P ist an Q über 20 Jahre 1000 Thl. zu bezahlen schuldig; Q wünscht aber jetzt die baare Zahlung, und bietet deshalb 5 Proc. jährlichen Rabatt; wie viel muß P jetzt baar bezahlen? Rechnen wir nun Rabatt in 100, so haben wir: $100 : 100 - (20 \times 5) = 1000 : x$ d. i. $100 : 0 = 1000 : x$, wo $x = 0$ und P gar nichts zu bezahlen braucht. Wäre die Zeit 25 Jahre, so würde P noch Geld von Q erhalten. Der richtige Ansatz heißt: $100 + 100 : 100 = 1000 : x$ oder $200 : 100 = 1000 : x$.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, daß man den Rabatt auf 2 Arten berechnet, a) auf 100, bei Vorausbezahlung von Schulden, Ankäufen u. s. w., b) in 100, bei Waarenberechnungen, im Buchhandel und im Wechselgeschäft. Der Rechner muß daher bei den Rabattaufgaben sein Augenmerk auf diesen Unterschied haben. In einigen Städten, z. B. in Amsterdam und Hamburg, wird auch bei Waarenzahlungen der Rabatt auf 100 berechnet, doch seit December 1822 in letzterer Stadt nur noch beim Zucker.

§. 59. Aufgaben über Rabatt in 100.

1) A kauft von B 1000 Pfund Kaffee, zu $12\frac{1}{2}$ Sgr., Ziel 6 Monat (d. h. die Zahlung braucht erst über 6 Monat zu geschehen)

image
not
available

Auflösung. Die ersten 250 Thl. (der erste Termin) wird 3 Monat vorausbezahlt, der zweite 6 Monat, der dritte 9 Monat, der vierte 12 Monat. Daher trägt der Rabatt für den ersten Termin: $3 \cdot {}^1/_2 = 1{}^1/_2$, für den zweiten $6 \cdot {}^1/_2 = 3$, für den dritten $9 \cdot {}^1/_2 = 4{}^1/_2$, für den vierten $12 \cdot {}^1/_2 = 6$ Proc. Die Berechnung ist also:

$101{}^1/_2 : 100 = 250 : x$ (x = 246 Thl. 9 Sgr.)
$103 : 100 = 250 : x$ (x = 242 „ 21 „)
$104{}^1/_2 : 100 = 250 : x$ (x = 239 „ 7 „)
$106 : 100 = 250 : x$ (x = 235 „ 25 „)

Baare Zahlung 964 „ 2 bis 3 Sgr.

Anmerkung. Pfenningbrüche über ${}^1/_2$ oder auch ${}^1/_2$ werden für ein Ganzes gerechnet, unter ${}^1/_2$ weggeworfen.

Zehnter Abschnitt.

Zusammengesetzte Zins- und Rabatt-Rechnung.

oder

Zinses-Zins- und Zinses-Zins-Rabatt-Rechnung.

§. 60. Im 8. Abschnitt §. 52 ist gesagt worden, was man unter Zinses-Zins versteht, und in welchen Fällen er angewendet wird. Zinseszins-Rabatt (doppeltes Interusurium von Einigen genannt) findet da seine Anwendung, wo man von einer rentlosen (zinslosen) Schuldsumme, die erst über einige Zeit zahlfällig wird, in der baaren Zahlung Zinseszins abzieht. Der Schuldner braucht dann statt der Schuldsumme einen baaren Werth zu erlegen, welcher auf Zinseszins ausgethan, in der bestimmten Zeit zu der Schuldforderung erwächst. Eine besondere Anwendung davon findet bei den Lebensversicherungs-Anstalten, Leibrenten und Anwartschaften Statt. Die beiden erstgenannten Anstalten sind auf Berechnungen gegründet, deren Bedingungen aus der Vergleichung der Geburts- und Sterbelisten und den Gesetzen der Zinseszinsrechnung hervorgehen. Aus jener Vergleichung ergibt sich nicht allein die Durchschnitts-Lebenszeit der Menschen, oder wie viel Jahre der Mensch im Durchschnitt lebt, sondern auch der verschiedene Grad der Sterblichkeit in jedem Lebensalter, so daß sich mit Wahrscheinlichkeit bestimmen läßt, wie viel Jahre ein Mensch in einem bestimmten Alter noch zu leben hat. Ueber letztere Verhältnisse bestehen vollständige, mit vieler Sorgfalt ausgearbeitete Tabellen. Die Berechnung einiger Aufgaben wird am besten zeigen, wie die eben erwähnten Anstalten nach diesen Verhältnissen eingerichtet sind, und ihr Bestehen haben können. Wer da wünscht, daß bei seinem Tode, einer von seinen Angehörigen — Frau, Kinder, Schwester u. s. w. — in den Be-

image
not
available

Für die 1000 Gulden, welche ihm am Ende des dritten Jahres ausbezahlt werden, entrichtet er

105 : 100
105 : 100
105 : 100
x : 1000

863 Gulden 54 Kreuzer beinahe.

Und so fort für jedes folgende Jahr, so daß er im Ganzen ungefähr 8863 Gulden zu bezahlen hätte. Es ist klar, daß er für jedes folgende Jahr weniger zu bezahlen braucht; für 1000 Gulden im 12. Jahr bezahlt er nur 557 Gulden beinahe.

Wenn in dem ersten Beispiele die Frau des Beamten, nach dem Tode ihres Mannes die 2000 Thl. zu 5 Proc. verzinset, so erhält sie jährlich 100 Thl. Ueberträgt sie aber dieß Kapital der Leibrentenanstalt als Eigenthum, so hat sie, im Fall sie etwa 50 Jahr alt wäre, für ihre Lebenszeit eine jährliche Einnahme von $8^2/_{11}$ Proc. oder von $162^2/_3$ Thl.

3) §. 61. Jemand wünschte über 12 Jahr ein Kapital von 5000 Thl. zu haben; wie viel muß er jetzt auf Zinseszins zu 5 Proc. austhun?

Auflösung.
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
105 : 100
x : 5000

x = 2784 Thl. und beinahe 6 Sgr.

Wer den Gebrauch der Logarithmen nicht kennt, für den ist die Auflösung solcher Aufgaben sehr mühsam, daher man zur Bequemlichkeit der Rechner Tafeln über Zinseszins und Zinseszins-Rabatt angefertigt, nach welchen man Aufgaben dieser Art durch einen Regel de tri-Ansatz leicht rechnen kann. Bei der Berechnung dieser Tafeln sind die Brüche, welche $^1/_2$ oder über $^1/_2$ sind, für 1 gerechnet, und welche unter $^1/_2$ sind, weggeworfen worden. In folgender Tafel ist sowol der Zinseszins als auch der Zinseszins-Rabatt zu 4 und 5 Proc. von 1000000 berechnet.

image
not
available

1. Anmerkung. Hier kann man obige Tabelle ebenfalls gebrauchen, obgleich die Zeit weit über 20 Jahre hinaus geht. Man nimmt nämlich zuerst das Verhältniß für 20 Jahre, das Resultat wird wieder nach diesem Verhältniß berechnet u. s. f. Nachdem dieß nun fünfmal geschehen ist, ergibt sich obiges Endresultat.

2. Anmerkung. „Die Zulässigkeit der Zinseszinsen wird durch die Gesetze eingeschränkt, um das unmäßige Anwachsen der Schuld zu verhüten. Wie nothwendig die Staatsgesetze darüber wachen müssen, lehrt ein neues merkwürdiges Beispiel.

Der im Jahr 1791 in Glogau verstorbene Justizrath Sack hat in einer Familienstiftung ein Vermögen von mehr als 200000 Thl. hinterlassen, dessen Betrag am Ende auf 256253 Thl. ausgemittelt wurde, und dessen Bestimmung zu Stipendien und allerlei milden Stiftungen sein sollte. Die dabei festgesetzte Zinsvertheilung war so erschwerend, daß schon nach dem zehnten Jahre dieser Stiftung ein Zuwachs von 102580 Thl. entstanden war. Auch nur zu 4 Proc. gerechnet, würde das Vermögen in der vierten Generation, oder nach 133 Jahren, eine Summe von 79,403,721 und nach 200 Jahren, 1,083,168,426 Thl. betragen haben, so daß diese Stiftung am Ende der einzige Kapitalist im Staate geworden wäre.

Daher ist durch höhere Verfügung festgesetzt worden, daß die Kapitalsumme genannter Stiftung nicht über 330000 Thl. anwachsen darf, und daß die jährlichen Ueberschusse zu wohlthätigen Zwecken verwendet werden sollen." (Schellenbergs Rechenkunst 2. B. S. 77.)

3. Anmerkung. Kries gibt in seinem Lehrbuch der reinen Mathematik die Zinsen von 1 Thl. zu 5 Proc. in 500 Jahren nach der einfachen Zinsrechnung zu 25 Thl. (500 : $^1/_{20}$ = 25); nach der zusammengesetzten auf mehr als 39323 Millionen an. — Nach einer angestellten Berechnung beträgt der Zinseszins zu 5 Proc. von 1 Pfeng. Sterling, von Christi Geburt an bis 1822 den Werth von 480413826162085965274632618223500 71 Thl. Conv. Geld. Der Durchmesser einer Silberkugel von diesem Werth würde gegen 182704 geographische Meilen, und eine Goldkugel von der Größe unserer Erde würde noch nicht hinreichen, die Zinsen von jener Summe auf 38 Minuten zu bezahlen. Der Rauminhalt der Erde beläuft sich an 9105956374994118144000000000000000 Kubikzoll. Rechnet man auf 1 Kubikzoll 3500 Pfenning Sterling, so ist die Berechnung leicht zu machen. 1 Pfen. Sterl. sind ungefähr 10 Pfenninge. Die einfachen Zinsen betrügen in dieser Zeit nicht mehr als 7 Schill. 1$^1/_2$ Pf. Wer die logarithmischen Berechnungen nicht kennt, findet die Ausarbeitung solcher Aufgaben äußerst mühsam.

Elfter Abschnitt.

Die Gesellschafts- oder Theilungsrechnung.

§. 62. Im Allgemeinen lehrt sie eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen theilen. Die Zahl, welche getheilt werden soll, heißt schlechthin das Ganze oder das Hauptganze, und die Zahlen, welche durch die Theilung hervorgebracht worden, Theile oder Haupttheile. Die Zahlen, welche das Verhältniß bezeichnen, nach welchem das Ganze getheilt werden soll, heißen Verhältnißzahlen, Normaltheile, Nichttheile oder auch der Theilungsfuß und die Summe derselben wird das Normalganze genannt. Wenn 100 Thl. unter drei Personen so getheilt werden sollen, daß A $^1/_2$, B $^1/_3$, C $^1/_6$ erhält, so ist $^1/_2 + ^1/_3 + ^1/_6 = 1$ das Normalganze, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$ sind die Normaltheile, 100 Thl. ist das Ganze oder Hauptganze, 50, 33$^1/_3$, 16$^2/_3$ sind die Theile oder Haupttheile. Betrifft

image
not
available

In diesem Falle müssen dann die Personen (Legatarien), welchen ein gewisser Theil vermacht worden ist, einen, mit der Größe des Legats im rechtmäßigen Verhältniß stehenden Betrag nachlassen. Falcidius hieß der Römer, welcher dieses Gesetz in Vorschlag brachte, daher auch die Benennung. Man könnte eigentlich auch die Mischungs- und Gold- und Silberrechnung hieher ziehen; da indeß die Gegenstände dieser Rechnungsarten eigenthümlich behandelt werden, so ist es doch besser, sie besonders abzuhandeln. Für den denkenden Rechner bieten alle diese Rechnungsarten keine Schwierigkeiten dar, indem alle hieher gehörigen Aufgaben eigentlich zur einfachen oder zusammengesetzten Regel de tri gehören. Die Gesellschaftsrechnung wird gewöhnlich eingetheilt in die einfache und zusammengesetzte. Bei jener kommt bloß Einlage und Gewinn oder Verlust, bei dieser auch noch die Zeit in Betracht.

§. 63. A. Einfache Gesellschaftsrechnung.

1) A und B treten in einen Kompagniehandel. A legt dazu ein 1000 Thl., B 1500; sie gewinnen damit 500 Thl., wie viel erhält jeder vom Gewinn?

Anmerkung. Der Lehrer mache darauf aufmerksam, daß bei gleichen Einlagen auch der Gewinn gleich vertheilt werden muß; da aber hier die Einlagen ungleich sind, so wird auch der Gewinn ungleich, und zwar im Verhältniß der Einlagen getheilt werden müssen. Daher doppelte Einlage, doppelter Gewinn; dreifache Einlage, dreifacher Gewinn. Er überlasse es zuerst dem Kinde zu bestimmen, wie wohl die Theilung geschehen müsse.

Auflösung. Die Summe der Normaltheile ist $1000 + 1500 = 2500$, das Normalganze. Die darnach zu theilende Zahl ist 500. Nun schließt man: wie sich das Normalganze (2500) zu seinen Normaltheilen verhält, so muß sich auch das Hauptganze zu seinen Haupttheilen verhalten. Also: $2500 : 1000 = 500 : x$ und $2500 : 1500 = 500 : x$, wo x im ersten Ansatze $= 200$, im zweiten $= 300$ ist. Der zweite Ansatz ist nicht nothwendig; da der eine Theil 200 bekannt war, so war der andere $500 - 200 = 300$. Noch muß hier bemerkt werden, daß der Rechner statt der Normaltheile 1000 und 1500, auch 10 und 15 oder 2 und 3 hätte nehmen können. Daraus geht die Regel hervor: wenn die Normaltheile ein gemeinschaftliches Maß haben, so bringe man sie dadurch auf den kleinsten Ausdruck.

2) A, B und C haben ein Vermächtniß von 1200 Thlrn. zu theilen, in welchem bestimmt ist, daß A so oft $\frac{1}{3}$ als B $\frac{1}{4}$ und C $\frac{5}{12}$ erhalten soll; wie viel erhält jeder?

Auflösung. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1$. Da hier die Normaltheile gerade ein Ganzes ausmachen, so erhält jeder den ihm gebührenden Theil ganz, als A $\frac{1}{3} \cdot 1200 = 400$; B $\frac{1}{4} \cdot 1200 = 300$; C $\frac{5}{12} \cdot 1200 = 500$ Thl.

Anmerkung. Bringt man hier die Normaltheile auf gleiche Benennung, so hat man $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$, und da Brüche von gleichen Nennern sich wie ihre Zähler verhalten, so können wir 4, 3, 5 als Normaltheile annehmen, daraus ergibt sich nun die Regel: sind die Normaltheile in ungleichnamigen Brüchen angegeben, so bringe man sie auf gleiche Benennung, und nehme dann deren Zähler als Normaltheile an.

image
not
available

Fälle oder praktischer Aufgaben den Schüler zu allgemeinen Wahrheiten oder zur Entdeckung von Gesetzen und Erfindung von Regeln hinzuführen. Dadurch bemächtigt sich der Schüler aller einzelnen, in diesen Kreis gehörigen Fälle. Ohne diese Einsicht ist kein gründliches Rechnen und keine sichere ausgedehnte Praxis möglich. Er soll aber auch, wie vorher gesagt, durch folgerechte Schlüsse aus dem Allgemeinen das Besondere, aus der allgemeinen Regel die spezielle Anwendbarkeit derselben auf einen einzelnen gegebenen Fall heraus zu finden versuchen. Bekanntlich nennt die Schule jenes zuerst angedeutete Verfahren die synthetische und dieses letztere die analytische Methode. Jene Lehrweise, die stets vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Besondern zum Allgemeinen fortschreitet, gehört hauptsächlich dem Elementarunterricht an; indeß halte ich es für gut, daß zuletzt bei den geförderten Schülern der Elementar- und Bürgerschule auch der Weg der Analyse versucht werde. Wenn sich der Schüler nach zurückgelegten Schuljahren in einem wissenschaftlich abgefaßten Lehrbuche belehren will, so ist er gezwungen, sich der analytischen Methode zu unterwerfen. Ist er nun mit dieser Art der Darstellung bekannt, und hat er auf diesem Wege schon gelernt, so wird es ihm nicht schwer fallen, ein wissenschaftliches Werk zu studiren. Im Gegentheil aber wird er durch die ernste und strenge analytische Lehrweise leicht abgeschreckt werden, und nie zu einem systematischen Wissen gelangen. Daher sollte der Lehrer hier das Eine thun, aber das Andere auch nicht lassen. Vorstehende Aufgabe ist eigentlich ein allgemeiner Ausdruck der vorhergehenden Aufgaben und bei aufmerksamer Betrachtung ergibt sich dem Schüler die allgemeine Aufgabe der Gesellschaftsrechnung, nämlich die: eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen zu theilen. Sind die Schüler mit der Buchstabenrechnung bekannt, so kann man der Aufgabe noch eine größere Allgemeinheit, wenn dieser Ausdruck erlaubt ist, geben. Sie heißt dann: a soll in 4 gleiche Theile getheilt werden und zwar so, daß das Verhältniß dieser Theile ist = m, n, p, q. Wie werden diese Theile ausgedrückt? Nennt man hier die Summe der Normaltheile m, n, p, q = s, so hat man die Proportionen:

$$\begin{aligned} s &: m = a : w \\ s &: n = a : x \\ s &: p = a : y \\ s &: q = a : z \end{aligned}$$

und die Haupttheile heißen

$$\frac{am}{s}, \quad \frac{an}{s}, \quad \frac{ap}{s}, \quad \frac{aq}{s}$$

Die Regel zur Auffindung der Theile von a heißt nun: man multiplicire das Hauptganze (a = 2400) mit jedem Normaltheile und dividire jedes dieser Produkte durch das Normalganze (s = 18). (S. §. 62.)

B. Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

§. 64. In den hieher gehörigen Aufgaben wird der Gewinn oder Verlust einer Gesellschaft nicht allein nach den verschiedenen Einlagen, sondern auch nach der verschiedenen Zeitdauer der Einlagen bestimmt. Die Normalzahlen sind hier nicht gleich gegeben, sondern sie müssen erst aus Einlage und Zeit bestimmt werden. Ein Beispiel wird die Sache deutlich machen. A und B handeln in Gesellschaft; A legt ein 1000 Thl., B 500 Thl. und sie gewinnen 120 Thl. Es ist klar, daß A doppelt so viel gewinnen wird als B, A also 2 Theile erhält, wenn B 1 Theil bekommt. Wir theilen also den Gewinn in 3 Theile, 3 : 120 = 40; dann ist der Antheil des A = 2 . 40 = 80, des B 1 . 40 = 40. Nun ergibt sich aber nachher, daß B seine Einlage 12 Monate und A nur 6 Monate im Handel gehabt hat. Natürlicher Weise muß jetzt die Theilung anders geschehen, B wird in Betreff seiner doppelten Zeit auch

image
not
available

A hatte 4 Mann 7 Tage = 28 Mann auf 1 Tag
B : 5 : 4 : = 20 : : : : } Normaltheile.
C : 4 : 8 : = 32 : : : :

80 das Normalganze.

80 : 40 = ½ Thl. auf jeden Normaltheil, also erhält
A 28 . ½ = 14
B 20 . ½ = 10
C 32 . ½ = 16

40 das Hauptganze.

Wie man verfahren muß, wenn die Einlagen zu verschiedenen Zeiten vermehrt oder vermindert werden, möge folgende Aufgabe, welche wir aus unserm zweiten Uebungsbuche entnehmen, darthun.

8) 1820 den 5. Mai bestimmt A ein Kapital von 1800 Thl. zur Handlung; nach 6 Monaten vermehrt er diese Einlage noch mit 700 Thl. Am 15. Juli tritt B mit 2000 Thl. hinzu, ist aber genöthigt, am Ende des Jahres 500 Thl. wieder herauszunehmen. Dagegen legt er am 1. Oktober 1821 noch 1500 Thl. ein. C vereinigt sich 1821 den 10. Februar mit ihnen, und zwar mit einer Einlage von 2400 Thl. 1823 den 25. August wurde dieser Gesellschaftshandel aufgelöset. Der Gewinn betrug 2800 Thl. Wie viel erhielt jeder an Kapital und Gewinn zurück?

Auflösung. A { 1800 . 6 M. = 10800
2500 . 33⅓ M. = 84166⅔
Einlage des A auf 1 M. = 94966⅔ Thl.
B { 2000 . 5½ M. = 11000
1500 . 9 M. = 13500
3000 . 22⅚ M. = 68500
Einlage des B auf 1 M. = 93000 Thl.
C 2400 . 30½ M. = 73200 Thl. auf 1 M.

Gesammteinlage auf 1 M. 94966⅔ Thl. + 93000 + 73200 Thl. = 261166⅔ Thl.

Gesammteinlage. Einl. von A. Gewinn.
261166⅔ : 94966⅔ = 2800 : x

x = 1018²³⁴/₁₅₆₇ = 1018¹⁵/₁₀₀ Thl. Gewinn für A. Die Einlage für A war zuletzt 2500 Thl. Diese dem Gewinn zugezählt = 3518¹⁵/₁₀₀ Thl. Kapital und Gewinn. Eben so mit B und C.

Zwölfter Abschnitt.

§. 65. Mischungsrechnung.

Sie führt auch den Namen Alligationsrechnung (Regula Alligationis) oder Beschickungsrechnung, und lehrt verschiedenartige Materien so zu vermischen, daß die Mischung eine bestimmte mittlere Qualität (Eigen-

Digitized by Google

image
not
available

§. 66. Aufgaben.

Anmerkung. Wenn mehrere Sorten von gleichem Preise gemischt werden, so steht die Mischung in demselben Preise.

1) Jemand mischt zwei Sorten Tabak, nämlich 10 Pfd. von einer Sorte zu 12 Sgr., und 6 Pfd. von einer andern Sorte, ebenfalls zu 12 Sgr.; wie theuer ist das Pfund dieser Mischung?

Auflösung. 10 Pfd. zu 12 Sgr. = 10 . 12 = 120 Sgr.
6 „ „ „ „ = 6 . 12 = 72 „

16 Pfund kosten 192 Sgr.

1 Pfund = 12 Sgr.

Anmerkung. Werden Stoffe von verschiedenem Werth gemischt, so erhält auch die Mischung einen, gegen die einzelnen Stoffe gehaltenen verschiedenen Werth.

2) A mischt 10 Pfund Tabak, das Pfund zu 15 Sgr. und 20 Pfd. zu 18 Sgr.; wie theuer wird das Pfd. der Mischung sein?

Auflösung. 10 . 15 = 150 Sgr.
20 . 18 = 360 „

30 Pfd. kosten 510 Sgr.

1 Pfd. = 17 Sgr.

Anmerkung. Diese beiden Aufgaben gehören zu der sogenannten Durchschnittsrechnung; die Antwort wird die Durchschnittszahl, Mittelzahl oder das arithmetische Mittel genannt. Sie bieten keine Schwierigkeiten dar. Der Lehrer beginne mit solchen leichten Aufgaben und gehe allmählich zu den schwereren über. Es kommen wirklich hier Aufgaben vor, die so gar leicht nicht zu lösen sind, und die Regeln, welche manche Rechenbücher zur Lösung derselben mittheilen, fand selbst Kästner, der an die Buchstabenformeln gewöhnt war, etwas dunkel. Die Buchstabenrechnung gewährt allerdings hier große Vortheile; indeß ist die Auflösung mit Ziffern, wenn nur dabei auf die rechte Weise verfahren wird, bei weitem so schwierig und dunkel nicht, als manche Rechner glauben mögen. —

3) A hat zwei Sorten Wein, die Flasche der einen Sorte kostet 6 Sgr., die Flasche der andern 14 Sgr. — Er will aus beiden eine Sorte mischen, von welcher die Flasche 10 Sgr. kosten soll; in welchem Verhältniß muß er von beiden Sorten nehmen?

Auflösung. Nehme ich von der ersten Sorte 1 Flasche, so fehlen am Preise 4 Sgr.; nehme ich aber von der andern Sorte 1 Flasche, so habe ich einen Ueberschuß von 4 Sgr. Jener Mangel und dieser Ueberschuß gleichen sich aus; daher kann ich von jeder Sorte gleich viel Flaschen nehmen.

4) Gesetzt aber, die Flasche der einen Sorte koste 6 Sgr., der andern 13 Sgr. und das Maß der Mischung sollte 8 Sgr. kosten, in welchem Verhältniß müßte ich dann die Sorten mischen?

Auflösung. Nimmt man von der ersten Sorte 1 Flasche, so ergibt sich im Preise ein Mangel von 2 Sgr., 1 Flasche der zweiten Sorte bewirkt aber einen Ueberschuß von 5. — Man bezeichne den Mangel mit Minus —, und den Ueberschuß mit Plus +. Wir haben also — 2 und + 5. Nimmt man von der ersten Sorte 2 Flaschen, von der zweiten 1 Flasche, so hat man — 4 und + 5. Mangel und Ueberschuß sind hier also noch um 1 verschieden, wir müssen aber

image
not
available

§. 67. Daß aber solche Aufgaben eine große Anzahl von richtigen Antworten zulassen, wird aus Folgendem klar. Gesetzt, A hätte dreierlei Weine, die Flasche zu 18, 15 und 10 Sgr. und wollte eine Sorte zu 12 Sgr. mischen, so könnte er dieß zuerst mit 2 Sorten zu 18 und 10 Sgr. Er hätte dann

18	1	+ 6	1	+ 6	von der ersten Sorte 1, von der
10	1	− 2	3	− 6	
12					

andern 3 zu nehmen. Setze ich also für die erste Sorte

1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.

so muß ich von der

andern Sorte 3, 6, 9, 12, 15 u. s. w. nehmen.

Eben so kann ich mit der zweiten und dritten Sorte zu 15 und 10 Sgr. verfahren. Nun bleibt uns noch der Fall, die erste und zweite Sorte nach Belieben zu mischen, aus welcher Mischung dann auf jeden Fall eine Qualität hervorgeht, welche zwischen 18 und 15 fällt. Diese Mischung können wir nun wieder mit der Sorte zu 10 Sgr. so zusammensetzen, daß die verlangte Qualität hervorkommt. Endlich bleibt noch die Mischung mit 3 Sorten übrig, welche, vorausgesetzt, daß man eine beliebige Quantität von jeder nehmen kann, noch eine Menge richtiger Antworten liefert.

18	1	+ 6	1	2	+ 12
15	1	+ 3	1	oder 2	+ 6
10	1	− 2	4½	9	− 18
12					

Wir können also in dem Verhältnisse nehmen: 2, 2, 9 oder 2 Fl. von der ersten, 2 Fl. von der zweiten und 9 Fl. von der dritten Sorte, macht zusammen 13 Flaschen. Jede Flasche gemischten Weins enthält also $^2/_{13}$ von der ersten, $^2/_{13}$ von der zweiten und $^9/_{13}$ von der dritten Sorte. Wir können nun auch nehmen 4, 4, 18; 6, 6, 27 u. s. w.; ferner 3, 2, 12; 6, 4, 24 u. s. w.; auch 2, 3, 10½; 4, 6, 21 oder 4, 2, 15 u. s. w. Jeder sieht leicht ein, daß mit dem Wechsel der ersten Sorte auch die andern Sorten wechseln müssen. Gesetzt nun, ich hätte 50 Flaschen der ersten Sorte, so könnte ich erstlich 50 richtige Mischungen machen, wenn ich, abgesehen von den möglichen Veränderungen der beiden andern Sorten unter sich, jedesmal von der ersten Sorte 1 Maß mehr nehme. Wechselt man dabei bloß die dritte Sorte gegen die erste, so hätte man:

a) Erste Sorte 1, 2, 3, 4, 5 . . . 50 Maß
b) Zweite = 2, 2, 2, 2, 2 . . . 2 =
c) Dritte = 6, 9, 12, 15, 18 . . . 153 =

Wechselt man bloß die zweite Sorte gegen die dritte, so ergiebt sich:

c) 2, 2, 2, 2, 2 . . . . .
b) 2, 3, 4, 5, 6 . . . . .
a) 9, 10½, 12, 13½, 15 . . . . .

Nimmt man die dritte Sorte als stehend an:

c)	9,	9,	9,	9		c) 27, 27,	27
b)	2,	3,	4,	5	oder	b) 6, 7,	8
a)	2,	1½,	1,	½		a) 6, 5½	5 u. s. w.

image
not
available

bietet keine Schwierigkeit dar. In 100 Pfund 10pfünd. Zinn ist das Verhältniß des Zinnes zum Blei wie 9 zu 1. Theilt man also die Masse in 10 Theile ($^{100}/_{10} = 10$): so sind in derselben $10 \times 9 = 90$ Pfund Zinn und $1 \times 10 = 10$ Pfund Blei. Sind verschiedene Sorten Blei gegeben und man will den Mischungsgehalt wissen, so suche man vorher die Menge Zinn und Blei der beiden Sorten auszumitteln, addire das Gewicht der Mischung, ebenso des Bleies, so ergibt sich aus der Vergleichung beider Gewichte der Gehalt der Mischung. Z. B. in 28 Pfund 7pfünd. Zinn sind 4 Pfund Blei und in 20 Pfund 5pfünd. Zinn sind auch 4 Pfund Blei; $4 + 4 = 8$ Pfd. Blei, $28 + 20 = 48$ Pfd. Die Zinnmischung verhält sich zu dem darin befindlichen Blei wie 48 : 8 oder 6 : 1, d. h. die Mischung ist 6pfünd. Wer 12 Pfund 6pfünd. Zinn hat und setzt etwa 3 Pfd. Blei zu, der hat in $12 + 3 = 15$ Pfund Zinnmischung 5 Pfund Blei, denn $^{12}/_{6} = 2$ Pfund Blei; dazu 3 Pfund $= 3 + 2 = 5$ Pfund Blei. Dieß in die Masse $12 + 3 = 15$ dividirt ($^{15}/_{3}$), gibt 3, also die Zinnmischung 3pfünd.

Gold und Silber werden ebenfalls nicht rein verarbeitet; das Silber wird mit Kupfer, das Gold mit Kupfer oder Silber oder mit diesen beiden Metallen vermischt. Dieß geschieht, um diesen Metallen mehr Härte zu geben, da sie in ihrem reinen Zustande sowol zu Münzen als andern Kunstsachen zu weich sind. Das unvermischte Metall wird rein oder fein genannt, das gemischte heißt legirt, das beigemischte schlechtere nennt man Zusatz. Gold und Silber werden schon seit langer Zeit nach dem Markgewicht gewogen; die Mark wird beim Gold in 24 Karat, beim Silber in 16 Loth und überdieß bei beiden Metallen in 288 Grän eingetheilt. Eine Mark von unvermischtem Gold oder Silber heißt eine feine Mark, von vermischtem oder legirtem eine rauhe Mark. Die Menge edlen Metalls, welches in einer legirten Masse enthalten ist, bestimmt dessen Gehalt oder Feingehalt. Beim Golde wird der Gehalt durch mehr oder weniger karatig, beim Silber durch mehr oder weniger löthig angezeigt. Reines Gold heißt 24 karatig, reines Silber 16löthig. Enthält eine Masse legirten Goldes 20 Theile Gold und 4 Theile Zusatz, so wird das Gold 20karatig genannt; sind in einer Masse legirten Silbers 12 Theile Silber und 4 Theile Kupfer, so heißt sie 12löthig. Im Preußischen wird zwar der Gehalt des Goldes und Silbers gesetzlich nach Grän, deren 288 auf eine Mark gehen, bestimmt; im übrigen Deutschland bezeichnet man noch den Gehalt nach karatig und löthig. Die Gold- und Silberarbeiter bestimmen den Gehalt einer legirten Masse der beiden edlen Metalle entweder mechanisch vermittelst des Probirsteins, oder chemisch durch Zerlegung. Der Probirstein ist ein Thonschiefer, ein fester schwärzlicher Stein, auf welchem sich mit Metallen recht deutliche Striche ziehen lassen. Reines Silber gibt einen ganz hellen weißen Strich; legirtes einen weniger hellen, dagegen mehr oder weniger röthlichen Strich, je nachdem dem Silber mehr oder weniger Kupfer beigemischt ist. Die Gold- und Silberarbeiter haben goldene und silberne Probirnadeln; erstere sind 24, 23, 22 u. s. w. karatig, letztere 16, 15, 14 u. s. w. löthig. Für

image
not
available

6 : 5 = 24 : x

x = 20 Karat, also ist die Masse 20 karatig

3) 2 Mark 12 löthiges, 4 Mark 14 löth. und 14 Mark 10 löth. Silber werden zusammengeschmolzen; von welchem Gehalt wird die Mischung sein?

Aufl. 2 . 12 = 24 d. h. wenn in 1 Mark 12 Theile Silber
4 . 14 = 56 sind, so werden in 2 Mark 24 Theile
14 . 10 = 140 Silber sein.

20 : 220

1 Mark = $^{220}/_{20}$ = 11 d. h. in 20 Mark legirt. Silber sind 220 Theile (Loth) fein Silber, also in 1 Mark 11 Theile, die legirte Masse ist also 11 löthig.

4) 3 Mark 20 karat., 2 Mark 19 karat., 2 Mark 15 karat. und 12 Karat fein Gold werden zusammengeschmolzen; wie viel karatig wird die Mischung sein?

Auflösung. 3 . 20 = 60
2 . 19 = 38
2 . 15 = 30
12 Kar. = $^1/_2$ Mark $^1/_2$. 24 = 12

$7^1/_2$: 140

1 Mark = $18^2/_3$ karatig.

5) Ein silbernes Gefäß wog $2^1/_2$ Mark und war 12löthig; wie viel reines Silber enthielt es?

Auflösung. 12löthig heißt, in 1 Mark oder 16 Loth sind 12 Loth reines Silber oder $^3/_4$ des Gefäßes ist Silber, also $^3/_4 . 2^1/_2 = 1^7/_8$ Mark reines Silber.

6) Jemand hat 23karatiges und 16karat. Gold und will daraus 20kar. mischen; in welchem Verhältniß muß er von beiden Sorten nehmen?

		Theile		Theile	
Auflösung. 23	1	+ 3	$1^1/_2$	+ 4
16	1	− 4	1	− 4
20				

Er wird also von der ersten Sorte $1^1/_2$, von der andern 1, oder von jener 4, von dieser 3 Theile nehmen.

7) Jemand hat 9löth., 10löth., 13löth. und 14löth. Silber und will daraus 12löthig mischen; in welchem Verhältnisse muß er von den Sorten nehmen?

		a) Theile		b) Theile		c) Theile	
Aufl. 12	9	1	− 3	1	− 3	1	− 3
	10	1	− 2	1	− 2	1	− 2
	13	1	+ 1	3	+ 3	1	+ 1
	14	1	+ 2	1	+ 2	1	+ 4 u. s. w.

Also entweder in dem Verhältnisse von b oder c und noch in vielen andern Verhältnissen.

image
not
available

nach, gleichsam unter der Hand, vielleicht von mehrern entstanden. Gesetzt N, ein Specereihändler in Köln, habe in früherer Zeit den Kaffee immer aus Amsterdam bezogen. Fast bei jeder neuen Sendung mußte er berechnen, wie hoch ihm 1 kölnisch Pfund in Köln zu stehen kam und wie theuer er es nun wieder verkaufen müsse. Die Kosten betrugen immer 5 Proc. In Köln wurde 1 holl. Pfund zu 34 Loth und 1 holl. Thaler zu 102 Stüver gerechnet; 1 Pfund Kaffee kostete ihm in Holland $7\frac{1}{2}$ Stüver; den Thaler zu 50 Stüver; im Verkauf rechnete er 20 Proc. Gewinn. Die Berechnung war für ihn folgende:

$$\text{a)}\quad \underset{\text{L.}}{34} : \underset{\text{L.}}{32} = \underset{\text{St.}}{7\tfrac{1}{2}} : x$$

$$x = \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2}}{34} \text{ Stüver.}$$

$$\text{b)}\quad \underset{\text{St.}}{50} : \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2}}{34} = 102 : x$$

$$x = \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 102}{34 \cdot 50} \text{ köln. Stüber.}$$

$$\text{c)}\quad 100 : \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 102}{34 \cdot 50} = 105 : x$$

$$x = \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 102 \cdot 105}{34 \cdot 50 \cdot 100} \text{ St. mit den Kosten.}$$

$$\text{d)}\quad 100 : 120 = \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 102 \cdot 105}{34 \cdot 50 \cdot 100} : x$$

$$x = \frac{32 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 102 \cdot 105 \cdot 120}{34 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 100} = 18\tfrac{13}{25} \text{ St.}$$

Die einzelnen Operationen des Multiplicirens und Dividirens sind hier bloß angedeutet, nicht ausgeführt worden. Wenn N diese Berechnung oft zu machen hatte, so mußten ihm die einzelnen Multiplikationen und Divisionen sehr beschwerlich fallen und er mußte mit der Zeit auf den Gedanken kommen, jene der Reihe nach, ohne die Zwischendivisionen und auf dieselbe Weise zuletzt alle Divisionen in eine einzige zu bringen. Er stellte daher alle Divisionen auf eine Seite und alle Dividenden auf die andere. Hiemit war der erste Schritt zur Kettenrechnung geschehen. Er hatte also:

$$\begin{array}{ccc} 34 & : & 32 \\ 50 & : & 102 \\ 100 & : & 105 \\ 100 & : & 120 \\ & & 7\frac{1}{2} \end{array}$$

In Hinsicht auf das Resultat war es einerlei, wie die Glieder auf einander folgten, wenn nur die Divisoren und Dividenden (Vorderglieder) nicht verwechselt wurden.

image
not
available

Nun folgt: 1 : $7\frac{1}{2}$ Stüver holl.

Da wir aber den Preis in köln. Stüb. wissen wollen, so müssen wir jetzt ein Verhältniß zwischen diesen beiden Geldsorten aufsuchen, 50 holl. Stv. sind 102 köln. Stüber 50 : 102 Stüber köln.

Die Kosten, so wie d. Gewinn erford. ein zunehm. Verhältn.: denn je größer die Kosten, desto höher der Preis und ebenso: je größer d. Gew., desto höher der Preis im Verkauf; also

100 : 105 Stb. mit den Kosten
100 : 120 = = = Gewinn.

Der Ansatz wird nun auf folgende Weise gelesen: wie viel kostet 1 köln. Pfund, wenn 1 köln. Pfd. 32 Loth, 34 Loth = 1 holl. Pfd., 1 holl. Pfd. $7\frac{1}{2}$ holl. Stüver kostet, 50 holl. Stüver = 102 köln. Stübern, 100 Stüber Einkauf 120 im Verkauf sein sollen. Da die Benennung der Glieder auf der linken Seite sich nach der rechten richtet, so bedürfen jene der besondern Benennung nicht. Die Basedowsche Regel und die Kettenregel sind zwar nicht wesentlich verschieden, indeß zeigt doch eine aufmerksame Vergleichung einen Unterschied in der Stellung der Glieder. Alle Aufgaben nach der ehemals so benannten Regel quinque (fünf), septem (sieben), lassen sich zwar nach der Kettenregel rechnen, doch etwas unbequem. Besser ist es, diese nach der Basedowschen Regel zu lösen. In der Behandlung stimmen übrigens beide Rechenformen überein, daher wir auch auf die zusammengesetzte Regel de tri verweisen.

Anmerkung. Der Algebraist wird folgende Darstellung vorziehen; doch müssen wir dem Lehrer rathen, nicht eher zur Rechnung mit allgemeinen Größen überzugehen, bis der Schüler mit dem Zifferrechnen vertraut ist. Die Elementarmethode geht vom Besondern zum Allgemeinen, und nicht vom Allgemeinen zum Besondern. Hat der Schüler diesen Weg gehörig kennen gelernt, dann erst mag er sich auch mit dem andern vertraut machen. —

N in Elberfeld kauft 140 (= a) brab. Ellen Tuch; für (= b) Ellen bezahlt er 12 (= c) Gulden. Er verkauft dasselbe in Elberfeld mit 20 Proc. Gewinn, d. h. für 100 (= d) Einkauf erhält er 120 (= e) Verkauf. Wie viel preuß. Thaler erhält er dafür, wenn 7 (= f) Gulden = 4 (= g) preuß. Thaler sind.

Nach einzelnen Regeldetrisätzen würden wir folgende Berechnung erhalten:

I. 3 Ellen (= b) : 140 Ellen (= a) = 12 Gld. (= c : $\frac{\overset{a}{140} \cdot \overset{c}{12}}{3\ (=b)}$ (sei = v)

II. 100 (= d) : 120 (= e) = $\frac{\overset{a}{140} \cdot \overset{c}{12}}{3\ (=b)}$: $\frac{\overset{a}{140} \cdot \overset{c}{12} \cdot \overset{e}{120}}{100\ (=d) \cdot 3\ (=b}$ (sei = w)

III. 7 (= f) Gld. : 4 (= g) pr. Th. = $\frac{\overset{a}{140} \cdot \overset{c}{12} \cdot \overset{e}{120}}{3(=b) \cdot 100(=d)}$: $\frac{\overset{a}{140} \cdot \overset{c}{12} \cdot \overset{e}{120} \cdot \overset{g}{4}}{3(=b) \cdot 100(=d) \cdot 7(=f)}$ (sei = x)

in welcher Bearbeitung x = 384.

image
not
available

die Elle in Pistolen zu $5^2/_3$ Thl. wieder verkaufen, wenn die Kosten von Leipzig bis Berlin $2^1/_2$ Proc betragen; für Einfuhrzoll 3 Proc. bezahlt werden muß, im Verkauf 15 Proc. gewonnen werden soll, und 100 Berliner Ellen 118 Leipziger Ellen sind?

Aufl. Der Fragepunkt ist also: wie theuer ist 1 Berl. Elle?

?	:	1	Berl. Elle
100	:	118	Leipz. «
1	:	20	Sgr.
24	:	1	Thl.
5	:	1	Pist. in Leipzig in Gold
1	:	$5^2/_3$	Thl. Cour. in Berlin
100	:	$102^1/_2$	Thl für Kosten, je größer die Kosten, desto theurer die Elle in Berlin.
100	:	105	Thl. wegen Einfuhr
100	:	115	Thl. wegen Gewinn.
4800000	:	6620803	

Antw. 1 Thl. 11 Sgr. 5 Pfg. beinahe.

Anmerkung. Unser zweites Uebungsbuch enthält eine Menge Aufgaben der Kettenrechnung, auf welches wir zur weitern Uebung verweisen. Ueberdieß werden in dem Abschnitt über Wechselrechnung noch Aufgaben vorkommen, welche nach der Kettenrechnung gerechnet werden.

Fünfzehnter Abschnitt.

§. 73. Vom Münzwesen.

Der Mensch hat von Natur den Trieb in sich, nicht allein sein Leben zu erhalten, sondern sich auch dasselbe möglichst angenehm und bequem zu machen. Beides fühlt er in sich als Bedürfniß, und die Dinge, welche ihm dazu dienen, dieses Bedürfniß zu befriedigen, heißen Bedürfnißmittel. Die Bedürfnisse der Menschen sind aber theils natürlich, theils erkünstelt, so wie auch die Bedürfnißmittel entweder Natur- oder Kunsterzeugnisse sind. Weil nun die Bedürfnißmittel den größten Einfluß auf das Wohlsein des Menschen haben, ja das irdische Glück des Lebens von deren Besitz abhängt, so haben sie für ihn einen Werth. Der Bedürfnisse, besonders der erkünstelten, sind aber viele, noch mehr der Bedürfnißmittel, welche jene erheischen. Das Streben der meisten, wo nicht aller Menschen, geht dahin, sich die Bedürfnißmittel zu verschaffen, welche dem Leben nothwendig sind oder doch ihnen Nutzen, Bequemlichkeit oder Vergnügen gewähren. Die Menschen schätzen nun diese Dinge mehr oder weniger, je nachdem sie in einem höhern oder geringeren Grade Bedürfniß für sie sind. Nicht jedes Land liefert alle Bedürfnißmittel, welche dessen Bewohnern zur Befriedigung ihrer Bedürfnisse nothwendig sind. Was aber dem einen Lande mangelt, das hat das andere im Ueberfluß, dagegen besitzt jenes überflüssig, was dieses bedarf. Daher ist denn ein gegenseitiges Austauschen der Bedürfnißmittel, sowol der Natur- als Kunsterzeugnisse

image
not
available

stückchen. Um aber die Verfälschung der Münzen zu verhüten, ist es durchaus nothwendig, daß wenig Personen und solche, welche das Zutrauen eines ganzen Volkes haben, also die Fürsten, das Recht, Münzen zu prägen, ausschließlich besitzen, und eben so nothwendig ist es, daß die Falschmünzer streng bestraft werden. Ein Gesetz der alten Egypter bestimmte schon, daß dem, welcher falsche Münzen macht, die Hand abgehauen wurde.

Es ist nicht mit Gewißheit bekannt, welches Volk zuerst Münzen geprägt hat. Einige schreiben diese Erfindung den Phöniziern, Andere den Lydiern, noch Andere andern Völkern zu. In der Bibel werden zuerst im 20 Kap. des 1. B. Mosis der Silberlinge gedacht, welche Stelle wahrscheinlich die älteste Spur von Münzen enthält. Kap. 23, 26 kaufte Abraham einen Begräbnißplatz für 400 Seckel Silber, das im Kauf gäng und gäbe war und wog dem Ephron solches dar *).

§. 75. An den eigentlichen Münzen ist hauptsächlich zu merken:

1) Das Gepräge oder die Präge, d. h. die auf beiden Seiten oder auch nur auf einer derselben angebrachten erhabenen Zeichen. Von den beiden Seiten heißt die eine die Hauptseite oder Avers. Sie enthält gewöhnlich das Kopf- oder Brustbild des Landesfürsten. Die andere Seite wird Rückseite, Kehrseite oder Revers genannt. Sie enthält das Wappen des Landesherrn oder ein Sinnbild oder bloß eine Schrift. Der Rand der Münze ist gewöhnlich gezackt oder auf eine andere Weise verziert oder beschrieben, um das Abfeilen oder Beschneiden zu verhüten.

2) Die Materie. Gold, Silber, Kupfer und Eisen sind von jeher am häufigsten zu Münzen gebraucht worden, jedoch letzteres von wenig Völkern. Die Spartaner und früherhin noch einige andere griechische Völker hatten eisernes Geld. Nach Cäsars Berichte fand man auch bei den alten Brittaniern eiserne Münzen, so wie auch die nordischen Völker deren gehabt haben sollen. Indeß ist das eiserne Geld nachher außer Gebrauch gekommen. Jetzt werden nur die drei erstgenannten Metalle zu Münzen gebraucht. Platin würde sich, wie sich nach einigen daraus verfertigten Probemünzen ergeben hat, ganz vorzüglich zu Münzmetall eignen, wenn es nur häufiger gewonnen würde. Da dieß edle Metall jetzt auch in Rußland gefunden wird, so mag die Zeit wol nicht mehr fern sein, da wir auch Platinmünzen haben werden **). Das Kupfer wird besonders zu den niedern Scheidemünzen gebraucht, da die Silber- oder Goldstücke von diesem Werth gar zu klein aus-

*) Seckel war bei den Juden der Name eines Gewichts (ungefähr 1/2 Loth) aber auch einer Münze. Es gab goldene und silberne Seckel (Silberlinge). Kenner der Münzwissenschaft behaupten, daß die Juden vor dem zweiten Tempel keine eigentlichen Münzen, sondern abgewogene Stücke edlen Metalls gebraucht hätten. Die ältesten Nachrichten von wirklichen Münzen reichen nicht an 1000 Jahre vor Chr. Geb. hinauf; die Schafgroschen oder Groschen, deren 1. B. Mosis 33, 19 erwähnt werden, seien Metallstücke von dem Werth eines Schafes gewesen. Simon, der Makkabäer Fürst, ließ aber wirklich Silber münzen, und von seinen Silberlingen sind noch mehrere bis auf unsere Zeiten gekommen.

**) Seit 1829 und 1830 werden Platinmünzen in großer Menge gemünzt, und zwar in Stücken von 3, 6 und 12 Rubel.

image
not
available

Theile Zusatz. Das Korn verhält sich zum Schrot wie $21^{1}/_{2}$ zu 24, oder wie 260 zu 288, oder kürzer wie 65 zu 72. In holl. Assen beträgt das Schrotgewicht 139, das Korngewicht $125^{1}/_{2}$. In Frankreich enthalten die Gold- und Silbermünzen $^{9}/_{10}$ reines Metall und $^{1}/_{10}$ Zusatz. Die gesetzliche Bestimmung des Schrot- und Korngewichtes einer Münze wird der Münzfuß genannt, oder da in Deutschland meistens verordnet wurde, wie viel Gulden aus einer Mark Silber geprägt werden sollten, so heißt dieser auch wol der Guldenfuß. Da es schwer hält, dem Münzmetall den festgesetzten Gehalt, und den Münzen das bestimmte Gewicht ganz genau zu geben, so ist beim Münzen eine kleine Abweichung vom Münzgesetz, Remedium genannt, gestattet. Der Münzwardein (Münzwaradein, Münzguardein) hat für die richtige Legirung des Münzmetalls, der Münzmeister aber für das Mechanische des Münzgeschäfts, besonders für eine deutliche, schöne und richtige Präge zu sorgen.

§. 76. Der gegenseitige Werth des Goldes und Silbers ist nicht immer derselbe gewesen; er wechselt, je nachdem das eine oder das andere Metall mehr oder minder gewonnen wird. Man kann beide Metalle als eine Waare ansehen, welche im Preise steigt oder fällt, je nachdem sie häufiger oder seltener zu haben ist. Zur Zeit von Christi Geburt war der Verhältnißwerth dieser edlen Metalle sehr nahe wie 1 zu 10, d. h. 1 Pfund Gold hatte den Werth von 10 Pfund Silber. Unter Tiberius war dieß Verhältniß 1 : 12 ($12^{1}/_{2}$ bis 13), unter Justinian 1 zu $14^{2}/_{3}$; unter Karl dem Großen 1 zu 12; im Anfange des 13. Jahrhunderts 1 zu 10; im Jahr 1500 wie 1 zu 12. Nachdem die Spanier Mexiko und Peru erobert, und dadurch weit mehr Silber als Gold nach Europa kam, bildete sich in Spanien das Verhältniß 1 zu 16, in den andern europäischen Staaten beinahe so und in den letzten 100 Jahren 1 : 14, 1 : 15 und noch höher.

§. 77. Die vorhin angeführten Metalle sind von jeher zu Geldsorten ausgemünzt worden, und da sie einen Werth an sich selbst haben, so sind sie auch vorzüglich dazu geeignet. Zur Zeit der Noth hat man zwar auch Münzen aus Zinn, Blei, Messing, Leder u. s. w. geprägt, doch waren dieß Nothmünzen, welche bald wieder außer Gebrauch kamen. Dagegen ist ein Stoff zu Münzen, oder vielmehr zu Münzzeichen genommen worden, welcher noch im Gebrauch ist, und den wir nicht übergehen dürfen. Dieß ist das Papier, welches seit einigen Jahrhunderten, besonders aber in der neuern Zeit eine neue Art Geld lieferte, das Papiergeld. In weiter Bedeutung gehören zum Papiergelde Banknoten, sowol von Privat- als Staatsbanken, Aktien von Handelsgesellschaften oder andern Unternehmungen, Staatsobligationen, Wechsel u. s. w.; in engerer Bedeutung, welche hier genommen wird, rechnet man nur dazu das eigentliche, vom Staate geschaffene Papiergeld, welches das Metallgeld im Verkehr allgemein vertritt. Die preuß. Kassenscheine, in Stücken von 1 Thaler, 5, 10, 50 u. s. w. Thalern sind bei uns das bekannteste Papiergeld. Wegen der Leichtigkeit des Stoffs und der leichten Empfänglichkeit der Präge hat dasselbe eigenthümliche Vorzüge vor dem Metallgelde; dagegen hat dieses

image
not
available

römisches Aß oder Pfund wiegt nach dem neuen preußischen Gewicht 22 Loth *). Es wurde eingetheilt in 12 Unzen oder 96 Drachmen, oder 288 Scrupel u. s. w., oder endlich in 6912 Gran **). Das Pfund, welches Karl der Große festsetzte, wurde ebenfalls in 12 Unzen eingetheilt, welche 6912 Gran wogen, die aber schwerer waren als jene, so daß 100 dieser Pfunde $114^2/_7$ römischen Pfunden gleich kamen. Ein Pfundgewicht von Karl d. G. ist gleich einem Pfund Troye-Gewicht, von der alten Stadt Troyes in Frankreich so genannt. Eine Troyes-Mark †) wog 4608 Grains und 19 dieser Mark sind = 20 köln. Mark, jede zu 16 Loth. Da nun im preuß. Staate bei allen Arten von Gewichten 1 preuß. Loth genau einem ehemaligen köln. Lothe gleichkommt, so sind wir vermittelst dieser wenigen Verhältnisse im Stande, alle alten Gewichte, und dadurch auch die alten deutschen Münzen, insofern davon Gewicht und Gehalt bekannt ist, auf unsere Zeit zurück zu führen.

§. 80. Anfänglich hatten die Römer nur Kupfermünzen, Aß genannt, welche 1 Pfund wogen, nachher aber an Gewicht immer mehr abnahmen. Der Denar oder Denarius war ihre Hauptsilbermünze, und wurde deshalb so genannt, weil er zuerst 10 Kupferaß gleichkam. Ihre Goldmünzen hießen aurei (von aurum, das Gold). Um die Zeit Christi gingen solcher 41 und in Silber 88 Denare auf 1 römisches Pfund; das Silber stand zum Gold in dem Verhältniß wie 1 : 11,65 (d. h. 1 : $11^{65}/_{100}$); nach dem Tode Nero's aber 45 Aurei und 96 Denarii und das Verhältniß des Silbers zum Golde war 1 : 11,72 (d. h. $11^{72}/_{100}$). Unter Constantin d. Gr. gingen 72 Aurei auf 1 röm. Pfund. Sie erhielten jetzt den Namen Solidi und späterhin wurden sie Byzantiner genannt, weil sie in Byzanz oder in dem heutigen Konstantinopel geprägt wurden. 100 Denarii machten ebenfalls 1 Pfd.; das Silber stand zum Golde wie 1 zu $14^2/_3$.

§. 81. Die Münzen der ersten fränkischen Könige waren, wie die römischen, theils silberne, auch Denarii genannt, theils goldene, Solidi, wiewohl sie auch silberne Solidi hatten. Kupferne Münzen scheinen sie nicht gehabt zu haben. Die Solidi erhielten, einige glauben von ihrem Klange, den Namen Schilling. Auf 1 Pfund von 12 Unzen gingen 24 Schillinge, auf 1 Schilling 12 Pfenninge. Ein silberner Solidus oder Schilling bestand aus reinem Silber; die deutschen Schillinge der neuern Zeit sind jenen alten an Werth sehr ungleich.

---

*) In Funkens Reallexikon wird ein römisches Pfund zu 21 Loth $3^{74}/_{100}$ Dtch. a. pr. Gew. angegeben. Reducirt man dieß in das neue preuß. Gewicht nach dem Verhältniß 512 zu 513, so erhält man sehr nahe 22 Loth.

**) Granum heißt auf Deutsch ein Getreidekorn, dessen Gewicht früherhin zur Bestimmung der höhern Gewichte zum Grunde gelegt wurde. Da aber ein Granum oder Gran nicht überall gleich schwer ist, so sind auch, bei übrigens gleicher Eintheilung, dennoch die Gewichte sehr verschieden. Wir werden späterhin sehen, mit wie viel größerer Genauigkeit man in unserer Zeit Maß und Gewicht bestimmt. —

†) Bis auf unsere Zeit hat man 1 Pfund Apothekergewicht von 12 Unzen, von einem Pfunde Krämergewicht von 16 Unzen und von einem Markgewicht = 8 Unzen unterschieden, welcher Unterschied wohl zu merken ist. Des letzteren bediente man sich beim Münzen, und wurde der größern Sicherheit wegen von der Obrigkeit gemarket, d. h. bezeichnet, daher der Mark, Markgewicht.

image
not
available

besonders aber waren die halliſchen Pfenninge — von dem Münzorte Halle in Schwaben Halleri oder nachher Häller genannt — von ſehr geringem Gehalt. Anfänglich waren Pfenninge (lat. denarii, franz. fenins und deniers, ſpan. dineros, engl pences, ſchwed. penning), Häller und Kreuzer einerlei und alle drei kleine Silbermünzen. Letztere erhielten ihren Namen daher, weil ſie mit einem Kreuz bezeichnet waren. Nachher kamen auch kupferne Häller auf, und man unterſchied deshalb rothe und weiße Häller. Ein Weißpfenning (Albus) wurde ſpäterhin zu 12 Hällern (kupfernen) gerechnet.

§. 83. Die Rechnung nach Pfunden und Marken fand man bald zu unbequem und es wurde ſtatt derſelben eine neue Münze, der Gulden, eingeführt, welcher aber von unſern neuern Gulden an Werth ſehr abweicht. Es war eine Goldmünze, daher der Name Gulden oder Gülden, und ſie vertrat die Stelle des alten Aureus oder Solidus. Wie dieſe, wurden auch die Gulden zu 20 Schillingen oder 240 Pfenningen gerechnet. Im Jahr 1252 ſchlug man zu Florenz in Italien eine neue Art Gulden, Goldgulden, von welchen 64 Stück von ganz feinem Golde auf die Mark gingen. Sie führten, wahrſcheinlich von der Stadt Florenz, den Namen Florenzer, Florener, Floren, woher nachmals die Benennung Florin, ſtatt Gulden, gekommen iſt. Die drei rheiniſchen Churfürſten von Mainz, Trier und Köln ließen im Jahr 1386 Goldgulden ſchlagen, von welchen 66 Stück auf die rauhe Mark von 23 Karat, alſo beinahe 68$^{9}/_{10}$ auf die feine Mark gingen. Sie hatten früher mit den Dukaten, welche König Rogerius von Sicilien im Jahr 1140 zuerſt in Apulien prägen ließ, faſt gleichen Werth. Späterhin ſchlug man auch Silbergulden, welche ſchlechthin Gulden genannt wurden.

§. 84. Im 13. Jahrhundert ſind die Groſchen aufgekommen. Doch ſollen dergleichen ſchon im 12. Jahrhundert (zu Trier 1104, zu Tours 1137 und hier 16 auf die franz. 15$^{1}/_{2}$löth. Mark) geprägt worden ſein. In Frankreich ſchlug man deren im Jahr 1226 zu Tours 58 Stück aus der franz. Mark zu 15$^{1}/_{2}$ Loth fein, alſo ungefähr 60 aus der feinen Mark. Es waren kleine dicke Silbermünzen, daher ſie auch gros deniers (Dickpfenninge), grossus, Groſchen oder von dem Münzorte Tours, Turnoſen, Torneſen, gros Tournois genannt wurden. Im Anfange des 14. Jahrhunderts prägte man deren auch in Böhmen, von feinem Silber, 60 aus der Mark. Bald aber 64 und ſpäterhin 80, 100, 120, 130, 150 u. ſ. w. unter verſchiedenen Namen. Noch früher, nämlich im Jahr 1253, ließ der König von Böhmen, Wenzel II., ſolche Groſchen ſchlagen, 60 aus der 15löthigen Mark. Die Groſchen waren um dieſe Zeit die größten und gebräuchlichſten Silbermünzen in Deutſchland.

§. 85. Um das Jahr 1484, einige meinen noch 30 Jahr früher, kam eine neue Silbermünze auf, welche an Werth einem damaligen rheiniſchen Goldgulden gleichkam, und daher auch den Namen Güldengroſchen oder Guldengroſchen, auch Dickgroſchen erhielt. Die erſten Münzen dieſer Art waren von ganz feinem Silber, 8 Stück gingen auf eine feine Mark. In dem eben angemerkten Jahre prägte man aber Güldengroſchen von 15löth. Gehalt, welche ebenfalls 2 Loth wogen und wovon 8 auf die

image
not
available

viele Reichsstände wegen des letzten Verbots sich nicht zu dieser neuen Münzordnung verstehen wollten, wurde 1566 nachträglich der Thaler als eine gültige Münze aufgenommen, wenn sie $14^2/_9$löthig wären, auf die rauhe Mark 8, auf die feine Mark also 9 Thaler zu 68 Kreuzer oder 10 Fl. 12 Kreuzer gingen.

§. 89. In manchen Kreisen Deutschlands war man aber mit der eben erwähnten Münzordnung nicht zufrieden, und von dieser Zeit an verbanden sich einzelne Kreise zu besondern Münzordnungen. Das Münzwesen kam nun sehr in Verfall und mit dem Anfang des 17. Jahrhunderts begann die sogenannte Kipper- und Wipperzeit. Die schwersten Sorten einer Münze wurden ausgewogen (gewippt), dann beschnitten (gekippt) und von neuem in Umlauf gesetzt; die Münzberechtigten verpachteten ihre Münzstätten und die Pächter lieferten so geringhaltige Münzen, daß die Mark fein schon zu $62^1/_2$ Gulden oder $40^2/_3$ Thaler ist ausgemünzt worden. Die guten Geldsorten wurden eingewechselt und in sehr geringhaltige Münzsorten umgemünzt. Der Thaler, welcher 1596 von den kaiserlichen Kommissarien zu Frankfurt a. M. auf 72 Kreuzer, mithin $12^3/_5$ Guldenfuß festgesetzt wurde, stieg bei diesem Münzunfug im Jahr 1619 auf 108 Kreuzer, 1620 auf 140, 1621 auf 144 bis 390; 1622 auf 450 bis 600 Kreuzer. In Sachsen stieg er 1621 auf 9, 10, 12, 13, 14, 15 Thaler, in andern Gegenden noch höher. —

Nothgedrungen, und nach manchen besondern Uebereinkünften, suchten nun die verschiedenen deutschen Kreise unter sich einen Münzverein zu bilden. Sachsen und Brandenburg traten im Jahr 1667 zusammen, und entwarfen in dem brandenburgischen Städtchen Zinna eine neue Münzordnung, den Zinnaischen Münzfuß. Nach demselben sollten aus der Mark feinem Silber $10^1/_2$ Thaler oder $15^3/_4$ Gulden gemünzt werden. Der Reichsthaler wurde auf 1 Gulden 45 Kreuzer oder 28 gute Groschen gesetzt; eine neue Münzsorte, Guldiner oder $^2/_3$ Stücke (von einem Thaler) oder auch doppelte Marktstücke genannt, galt 60 Kreuzer oder 16 Sgr.

§. 90. Es kam aber von neuem zu Streitigkeiten und Unordnungen, da einige Kreise sich beschwerten, daß nach dem Zinnaischen Münzfuß die Thaler und Guldiner, überhaupt das Silber gegen das Gold zu hoch angesetzt sei. Da erschienen nun bald nach diesem, bald nach jenem Münzfuß allerlei Geldsorten, und auf dem Reichstage konnte man sich nicht einigen. Da traten abermals Brandenburg und Sachsen nebst Braunschweig zusammen, und errichteten 1690 in Leipzig den Leipziger Münzfuß. Die Mark fein Silber sollte demnach zu 12 Thaler oder 18 Gulden und die Mark fein Gold zu $271^3/_{10}$ Gulden beinahe ausgemünzt werden. Der Dukat wurde auf 4 Gulden oder 64 Groschen (67 Stück aus der $23^1/_9$karat. Mark), der Thaler auf 2 Gulden, der Goldgulden zuletzt auf 3 Gulden, 72 Stück auf die Mark von $18^5/_9$ Karat gesetzt. Nach manchen Widersprüchen, Vorschlägen und Berathungen wurde endlich 1738 dieser Münzfuß als Reichsmünzfuß angenommen. Das Silber stand zum Golde wie $1 : 15^1/_{10}$.

§. 91. Die Vereinbarung der Reichsstände in Betreff des Münzwesens war aber von kurzer Dauer. Die früheren Widersprüche erneuerten

image
not
available

Der 24 Guldenfuß wird auch Konventionsfuß genannt, und seit seinem Bestehen heißt der 20 Guldenfuß der Konventionskurantfuß, weil wirkliche Münzen nach ihm im Umlauf sind.

§. 94. Seit dem Jahre 1838 besteht in den, zum Zoll- und Handels-Vereine verbundenen deutschen Staaten der $24\frac{1}{2}$ Guldenfuß. Möglichst große Erleichterung des Verkehrs in denselben machte eine völlige Uebereinstimmung, oder eine größtmögliche Annäherung durch einfache, bequeme Verhältnisse im Münz- und Maßwesen nothwendig. Die Einigung und Uebereinstimmung im Münzwesen war aber mit großen Schwierigkeiten und Nachtheilen verbunden; daher entschloß man sich denn zu einem, beim Ausmünzen der verschiedenen Münzsorten zum Grunde zu legenden einfachen Verhältnisse. Schon seit längerer Zeit wurde in den süddeutschen Staaten des Zollvereins nach dem $24\frac{1}{2}$ Guldenfuße gemünzt, und der preußische Thaler im Werthe nach diesem Münzfuße, nämlich zu 105 Kreuzer allgemein im Handel, ja sogar in den Regierungskassen angenommen. Denn da Preußen nach dem 21 Gulden- oder 14 Thaler-Fuß münzt, so verhalten sich beide Münzfuße zu einander wie 14 Thl. zu $24\frac{1}{2}$ Gld. oder 28 Thlr. = 49 Gld. oder 4 Thl. = 7 Gld. und 1 Thl. = $1\frac{3}{4}$ Gld. oder 105 Kreuzer. Dieser $24\frac{1}{2}$ Guldenfuß wurde nun von Baiern, Würtemberg, Baden, Hessen und Frankfurt a. M. gesetzlich angenommen, und beim fernern Ausmünzen zum Grunde gelegt. Das Markgewicht haben die Vereinstaaten übereinstimmend zu 233,855 Grammen gesetzt; das Münzmetall muß $\frac{9}{10}$ Silber und $\frac{1}{10}$ Kupfer enthalten; auf eine feine Mark gehen sieben Zweithaler- oder $3\frac{1}{2}$ Guldenstücke, auf die rauhe Mark $6\frac{3}{10}$ Zweithaler- oder $22\frac{1}{20}$ $3\frac{1}{2}$ Guldenstücke *).

§. 95. Es bleibt uns nun noch übrig, die neue preußische Münzordnung vom 30. September 1821 kennen zu lernen. Sowol in den Silber- als Goldmünzen ist man dem vorigen Graumannischen Münzfuße getreu geblieben. Er unterscheidet sich von diesem nur in der Eintheilung der Münzsorten. Der Thaler wird darnach in 30 Silbergroschen, dieser in 12 Pfenninge **) eingetheilt, statt daß man früher den Thaler zu 24 Silbergroschen, jeden zu 12 Pfenningen rechnete. Die früheren Drittel-, Sechstel- und Zwölftel-Stücke sollen nach und nach eingeschmolzen, welches

*) Ausführlichere Belehrungen über das Münzwesen gibt das von mir verfaßte Werkchen: „Das Wissenswürdigste aus der Münz-, Maß- und Gewichtskunde, eine Zugabe zu jedem praktischen Rechenbuche für Real- und Bürgerschulen. Elberfeld 1839. Büschlersche Verlags-Buchhandlung."

**) Pfenning oder Pfennig? Genau genommen ist beides unrichtig. Unter Otto I. kam eine kleine Silbermünze auf, welche man Brakteaten, Hohlmünzen, auch Paningos nannte. Letzteren Namen sollen sie daher haben, weil sie auf der einen Seite hohl waren und Aehnlichkeit mit den Pfannen hatten. Von diesem Worte Paningos soll nun unsere kleine Scheidemünze ihren Namen haben. Die mittlere Silbe „nin" entscheidet für die Endsilbe „ning". Die erste Silbe müßte nun nach richtiger Ableitung „Pán" heißen, und aus dem Munde des Volks hört man noch oft die Aussprache Pánning. Da aber das niederdeutsche Wort „Panne" ins Hochdeutsche „Pfanne" übergegangen ist, und der Gebrauch längst für „e" statt „ä" entschieden hat, so schreiben wir mit Recht „Pfenning".

image
not
available

der Friedrichsd'or ist $21^{7}/_{8}$ karatig. Der Zusatz darin beträgt $^{28}/_{288}$ oder $2^{1}/_{2}$ Karat auf die Mark. Das Verhältniß des reines Metalls zu dem legirten, aus welchem der Friedrichsd'or besteht, ist also 260 : 288 oder 65 : 72 oder wie $21^{7}/_{8}$: 24. Wenn das Gewicht einer Masse feinen Goldes 1 Mark = 24 Karat oder 288 Grän beträgt, so wird die legirte Masse, aus welcher Friedrichsd'or geprägt werden, $26^{38}/_{65}$ Karat wiegen, denn: 65 : 72 = 24 : x, wo $x = 26^{38}/_{65}$ Karat, d. h. zu 65 Theilen feinem Golde gehören nach dieser Münzordnung 72 Theile legirtes Gold, wie viel Karat legirtes Gold werden zu 24 Karat feinem Golde erfordert? $= 26^{18}/_{65}$. Da nun aus 24 Karat legirtem Golde 35 Stück Friedrichsd'or geprägt werden, so erhält man aus $26^{38}/_{65}$ Karat dieser legirten Masse $38^{10}/_{13}$ Stück. 24 : $26^{38}/_{65}$ = 35 : x, wo $x = 38^{10}/_{13}$. In holländ. Aß ausgedrückt, beträgt das Gewicht des Korns $\frac{4864}{38^{10}/_{13}} = 125^{29}/_{65}$, und das Gewicht des Schrots $^{4864}/_{35} = 138^{24}/_{35}$ oder sehr nahe 139, d. h. in $38^{10}/_{13}$ Stück Friedrichsd'or sind 4864 Aß fein Gold, also erhält man das Korngewicht von 1 Friedrichsd'or, wenn man 4864 durch $38^{10}/_{13}$ dividirt; ferner: 35 Friedrichsd'or wiegen 4864 Aß, daher erhält man das Schrotgewicht von einem Friedrichsd'or, wenn man 4864 Aß durch 35 dividirt.

Dieser Münzfuß in Golde gilt besonders im nördlichen Deutschland und wird der Pistolenfuß genannt. Die Pistolen sind ursprünglich eine spanische Goldmünze und haben auch ihren Namen von dem spanischen Worte Piastola, Stückchen, Plättchen. Zu den Pistolen gehören außer dem Friedrichsd'or und Friedr. Wilhelmsd'or noch die sächsischen Augustd'or, die braunschw. Karlsd'or, die dänischen Christiansd'or und die hannöverschen Georgsd'or. Außer dem Pistolenfuß sind für Deutschland noch besonders zu merken a) der Dukatenfuß. Nach der Reichsmünzordnung von 1559 gehen $67^{61}/_{71}$ Stück auf die feine Mark, eben so viel nach dem 20 Guldenfuß. Es gibt deren mancherlei, welche jedoch an Werth einander sehr nahe kommen. In Italien und Spanien werden auch silberne Dukaten, von 1 bis $1^{1}/_{3}$ Thaler an Werth, geprägt. b) Der Goldguldenfuß, der älteste deutsche Münzfuß. Die Gologulden haben an Werth immer mehr abgenommen. Im Jahr 1365 wurde unter Karl IV. aus einer feinen Mark Gold $63^{63}/_{95}$ Stück und im Jahr 1559 unter Ferdinand dem Ersten $93^{15}/_{37}$ Stück geprägt. Vom Jahr 1717 an kamen dreifache Goldgulden unter dem Namen Karolin und zweifache mit der Benennung Max'or in Umlauf. Uebrigens war noch ein kleiner Unterschied zwischen hannöverischen und rheinischen Goldgulden. Es werden aber jetzt weder Goldgulden, noch Karolin, noch Max'or mehr geprägt. Die im Umlauf befindlichen Münzsorten werden durch den häufigen Gebrauch abgenutzt; daher stimmt ihr Gewicht mit dem gesetzlich vorgeschriebenen Gewicht nicht überein. Auch kann beim Prägen der Münzen weder das bestimmte Verhältniß des Korns zum Schrot, noch das ganze Gewicht derselben vollkommen gegeben werden, weshalb ein Remedium (Nachlaß) gestattet wird (s. §. 75). Dieser Unterschied ist bei den Silbermünzen von geringer Bedeutung; bei den Goldmünzen kommt er aber in Betracht. Daher hat man denn einen etwas leichtern Fuß, den

image
not
available

?	:	2 Schill.
1	:	12 Pfg.
660	:	1 Mark Troyes-Gew.
19	:	20 „ Köln.
1	:	14 Thl. preuß.
1	:	30 Sgr.

Antw. 16 Sgr. stark.

Anmerkung. Der Nichtkenner schätzt gar leicht die alten Münzen und die alten Preise der Lebensmittel nach der gegenwärtigen Zeit, urtheilt daher sehr irrig, wenn er die übergroße Wohlfeilheit der Lebensbedürfnisse jener alten Zeit lobt. Denn erstlich ergiebt sich ein ganz anderes Resultat, wenn die alte Münze in neues Geld reduzirt wird. Da die Schillinge von sehr verschiedenem Werthe in vielen Ländern verbreitet sind, so wird jeder leicht die Schillinge der alten Zeit nach den Schillingen seines Landes schätzen. Am Niederrhein z. B. wird man leicht jene 2 Schillinge für köln. Schillinge, eine Scheidemünze der neuern Zeit halten, von welchen 8 auf einen berg. Thaler zu 60 Stbr. gingen. Zum andern muß der Preis der Dinge stets nach der Produktion und Consumtion derselben, so wie nach der Menge des Geldes, welches in einer Zeit im Umlauf ist, bestimmt werden. Könnte man solchen Tadler der neuen Zeitverhältnisse und Lobredner der alten Zeit wirklich in jene alten Verhältnisse versetzen, so würde er erfahren, in welchem Irrthum er befangen gewesen.

2) Kohlrausch führt in seiner deutschen Geschichte Folgendes an: zur Zeit Klodwigs, des Frankenkönigs, gegen das Jahr 500, hatten dessen Getreuen oder Vasallen 600 Schillinge Sühn- oder Wehrgeld, der gemeine freie Franke 200 Schilling. Ein Ochse galt 2, eine Kuh 1, ein Hengst 6, eine Stute 3 Schilling. Der Schimpfname Hase wurde mit 6 Schilling, Betrüger oder Hundsfott mit 15 Schill. bestraft. Die Verstümmelung der Hand kostete 100 Schillinge, des Daumens 45, des Zeigefingers 35, jeder der andern Finger 15 Schillinge.

Hier ist nun das Verhältniß der Preise und der Strafen wohl zu ersehen, aber mehr auch nichts. Wie viel gilt nun ein solcher Schilling in unserm Gelde?

Bis auf Chlodwig waren römische Münzen und Gewichte im Gebrauch. Jene Schillinge sind dann römische silberne Solidi, welche nach den vorhin angegebenen Verhältnissen nach folgendem Ansatz in unser Geld zu berechnen sind:

?	:	1 Schilling
20	:	1 Pfund röm.
112½	:	100 „ Troye-Gew.
19	:	20 „ Köln. „
1	:	2 Mark
1	:	14 Thaler preuß.

Antw. 1 Thl. 9 Sgr. und sehr nahe 4 Pfg.

3) Friedrich VI., Burggraf von Nürnberg, hatte dem Kaiser Siegmund an 400000 Goldgulden (nach andern Dukaten, fast von gleichem Werthe) geliehen, wofür ihm dieser auf der Kirchenversammlung zu Kostnitz im Jahr 1414 die Mark Brandenburg erblich und als Eigenthum abtrat. Wie viel beträgt die Summe in preuß. Thl.?

image
not
available

	Karatig.	Schrotgew. in holl. Aß.	Korngew. in holl. Aß.
Der rheinische Goldgulden	$18^1/_2$	$67^1/_2$	52
Karolin zu 3 Goldgulden	$18^1/_2$	$202^2/_3$	$156^1/_5$
Mard'or zu 2 "	$18^1/_2$	135	104
Brab. doppelte Souverain'or . . .	22	$231^1/_9$	$213^2/_3$
" halbe Svrd'or nach Verhältniß			
Englische Sovereigns	22	$166^1/_3$	$152^7/_{20}$
Französ. Louisd'or seit 1785	$21^1/_2$	$158^2/_3$	$143^1/_3$
Napoleond'or von 40 Francs	$21^3/_3$	$266^2/_3$	$239^7/_{10}$
Holl. Ruyder zu 12 Fl. Cour. . . .	22	207	$189^1/_7$
" Dukaten (eben so die poln.). . .	$23^7/_{12}$	$72^2/_3$	$71^1/_3$
Spanische Pistolen seit 1772	$21^2/_3$	$140^9/_{10}$	130
Russische Andreas-Dukaten oder doppelte Rubel	$18^3/_4$	85	$66^1/_2$
Russ. Dukaten zu 5 Rubel seit 1798 .	$23^2/_3$	$126^2/_5$	$124^7/_{10}$
" Imperalien zu 10 Rubel seit 1789	22	$270^1/_3$	$247^3/_3$
Römische Zechinen, alte und neue . .	$23^3/_3$	$71^3/_{10}$	70
Mailänd. Doppien, neue Pist. . . .	$21^3/_4$	$130^2/_3$	$118^2/_3$
Schwedische Dukaten seit 1777 . . .	$23^5/_{12}$	$72^1/_2$	$70^2/_3$
Dänische Speciesdukaten	$23^1/_2$	$72^3/_5$	68
" Christiansd'or	$21^2/_3$	139	$125^1/_2$

§. 100. Aufgaben über vorstehende Tafel.

Es kommen hier hauptsächlich folgende Stücke in Betracht: das Korn- und Schrotgewicht einer Münze, die Anzahl der Münzstücke, welche auf eine rauhe und feine Mark gehen, das Gehalt der Münze, das Verhältniß des Goldes zum Silber, Bestimmung des Werthes einer Münze in verschiedenem Münzfuß. Diese Berechnungen sollen hier am preuß. Thaler und an einer preuß. Pistole gezeigt werden, nach welchen es dann leicht ist, die Anwendung auf andere Münzen zu machen.

1) Aus der Mark fein Silber werden 14 Thaler geprägt; wie viel holl. Aß wiegt a) das Korn, b) das Schrot eines preußischen Thalers? 1 köln. Mark = 4864 Aß.

Auflösung. Also enthalten 14 Thaler 4864 Aß fein Silber, also 1 Thl. = $^{4864}/_{14}$ = $347^3/_7$ Aß. Da aber das Münzmetall, aus welchem Thl. geschlagen werden, 12löthig ist, so wird sich das reine Silber zur legirten Masse verhalten wie 12 zu 16, daher 12 : 16 = $347^3/_7$: x. Antw. $463^5/_{21}$.

2) Aus der Vergleichung des Schrot- und Korngewichts ergibt sich auch das Gehalt der Münze; $463^5/_{21}$: $347^3/_7$ muß gleich sein dem Verhältnisse 16 : 12, des legirten Metalls zum reinen.

3) Aus der reinen Mark Silber werden 14 Thl. geprägt, wie viel aus der 12löthigen Mark?

$$16 : 12 = 14 : x.$$

$$x = 10^1/_2 \text{ Thl.}$$

dividirt man nun $10^1/_2$: 4864, so erhält man, wie vorher, das Schrotgewicht eines Thalers.

image
not
available

Sechszehnter Abschnitt.

§. 101. Wechselrechnung.

Wechseln in kaufmännischer Bedeutung genommen, heißt eine Münzsorte für eine andere tauschen. Ist dabei eine Münzsorte besser als die andere, so wird von der schlechtern Sorte etwas mehr gegeben, als sonst ihr gegenseitiger gangbarer Werth ist. Dieser Ueberschuß wird Aufgeld oder Agio genannt. Z. B. A habe an B 46 Thl. in französischen Kronenthalern zu $1^{8}/_{15}$ Thaler zu bezahlen, so werden dazu gerade 30 Kronenthaler erforderlich sein. Gesetzt aber, A hätte diese Münzsorte nicht, sondern nur Scheidemünze — Silbergroschen, Zwölftelstücke u. s. w. Da diese für den größeren Verkehr viel unbequemer sind als Kronenthaler, so würde sich B es wohl nicht gefallen lassen, die Bezahlung in diesen schlechten Geldsorten anzunehmen. Um nun den B schadlos zu halten, bietet daher A für jeden Kronenthaler 1 Silbergroschen mehr, und B erhält statt des Werthes von 30 Kronenthl. jetzt 30 Kronenth. und 30 Sgr. Das Agio oder Aufgeld beträgt also hier 30 Sgr. oder 1 Thl. So sagt z. B. der Kaufmann: preuß. Pistolen stehen 15 proc., d. h. 100 Thaler in preuß. Pistolen zu 5 Thl. sind 115 gangbare Thl. in Silber. Das Agio ist dann 15 Thl.

§. 102. Es ist aber im Handel sehr oft der Fall, daß jemand eine Summe Geld an einen entfernten Ort zu bezahlen oder von demselben zu beziehen hat. In diesen Fällen wird nun das eigentliche Wechselgeschäft in Anwendung gebracht. Ein Beispiel wird die Sache verständlich machen. Herr A in Elberfeld hat einen Sohn B in Hamburg, dem er 200 Thaler übermachen will. Anstatt das Geld baar durch die Post dorthin zu versenden, geht A zu dem Kaufmann C in Elberfeld, welcher nach Hamburg handelt, zahlt diesem die Summe von 200 Thl., und erhält dafür von C folgenden Brief (Wechselbrief):

Elberfeld, den 30. Juni 1829. Gut für 200 Thl. in Louisd'or à 5 Thl.

Einen Monat nach dato zahlen Sie gegen diesen Solawechsel an die Verordnung des Herrn B die Summe von zwei hundert Thaler in Louisd'or zu 5 Thaler. Werth empfangen. Sie stellen solchen auf meine Rechnung; laut Bericht.

Friedrich C.

Herrn Schreiber & Comp.
in Hamburg.

A schickt diesen Brief seinem Sohne B, welcher ihn dem Herrn Schreiber vorzeigt, und das Geld dafür erhält. Hier kommen nun 4 Personen vor, die in der Kaufmannssprache besondere Namen haben, welche wohl zu merken sind. A, der den Wechselbrief versendet, heißt Remittent (Versender); B, welcher den erhaltenen Wechselbrief dem Herrn Schreiber vorzeigt, um Geld zu erhalten, heißt Präsentant (Vorzeiger); C, welcher den Wechselbrief geschrieben oder ausgestellt hat, heißt Trassent (Zieher, Aussteller); Herr Schreiber, welcher den Wech-

image
not
available

habe. Ein solches Zeugniß heißt Protest. Z schickt den Protest an Y, von welchem er den Wechselbrief erhalten hat. Der Wechsel läuft nun auf alle Indossenten zurück, bis auf den Remittenten A, welcher ihn dem Trassenten Lauter wieder einhändigt. Dieser muß endlich, wenn jeder Indossent, wie auch der letzte Inhaber des Wechsels, gesetzlich und pünktlich verfahren hat, den Wechsel mit allen Kosten bezahlen. Um aber die Kosten zu mindern, wird oft noch auf den Wechsel eine Nothadresse geschrieben, vermöge welcher der Präsentant, im Fall man die Zahlung weigert, auf einen andern angewiesen wird. —

§. 105. Ich kann einen Wechselbrief entweder auf mich selbst oder auf eine andere Person ausstellen. Jene heißen eigene Wechsel, oder auch Wechsel auf sich selbst (Promessen), und sie enthalten ausdrücklich die Worte: „Gegen diesen meinen Wechselbrief zahle ich . . . Monat nach dato u. s. w." — Wenn Wechselbriefe auf entfernte Orte gehen, so werden, der Sicherheit wegen, oft mehrere Abschriften davon genommen, und diese zu verschiedenen Zeiten abgesandt. Der erste Wechselbrief führt den Namen Prima, der zweite Sekunda, der dritte Tertia, welche Namen im Wechselbriefe angeführt werden; die Nichtbeachtung derselben kann sehr unangenehme Folgen, oft bedeutenden Schaden nach sich ziehen. —

§. 106. An bedeutenden Handelsplätzen sind Kaufleute, welche sich nur mit Wechselgeschäften abgeben. Sie werden Banquier oder Wechsler genannt. Man kann bei denselben für baares Geld Wechselbriefe, die an entfernten Orten zahlbar sind, einkaufen, oder Wechselbriefe für baares Geld verkaufen oder Wechselbriefe gegen andere Wechselbriefe tauschen. Wöchentlich wird durch kleine Zettel (Kurszettel) bekannt gemacht, zu welchen Preisen Wechsel zu kaufen oder zu verkaufen sind.

§. 107. In einigen großen Handelsstädten hat man noch besondere, für den Handel sehr bequeme und vortheilhafte Veranstaltungen getroffen. Mehrere Kaufleute nämlich haben zur Beförderung eines leichtern Verkehrs, gemeinschaftlich eine Summe Geld zusammengelegt. Man nennt solche, unter dem Schutze der Obrigkeit stehende Anstalt eine Bank, von welcher für den Handel besonders zwei Arten zu merken sind. 1) Die Giro- (spr. Dschiro) Bank, 2) die Zettelbank. Bei einer Girobank haben sich die Kaufleute eines Orts vereinigt, und eine Summe Geld zusammen gelegt, von welchem der Beitrag eines Jeden in ein besonderes dazu bestimmtes Buch eingetragen wird. Jeder Theilnehmer hat hierin sein besonderes Folium (Blatt) und über das Ganze wird genau Buch und Rechnung gehalten. Schuld und Forderung der Theilnehmer unter sich wird durch Ab- und Zuschreiben berichtigt, z. B. A habe ein Folium von 8000 Thalern, B von 10000 Thalern. B wird an A 3000 Thl. schuldig. Statt der baaren Zahlung wird dem A nun 3000 Thl. zu- und dem B eben so viel abgeschrieben. A hat also jetzt ein Folium von 11000 Thl., B von 7000 Thl. Doch bezahlt die Bank auch baar, wenn es verlangt wird. Eine Girobank ist meistens nur für die Handelsleute der Stadt selbst von großem Vortheil. Die bedeutendsten Girobanken sind in Amsterdam und Hamburg, die älteste ist die venetianische vom Jahr 1597.

image
not
available

		Briefe.	Geld.
2 Monat	Wien in 20 Krz.	103⅜	—
2 Monat	Augsburg	103¼	—
2 Monat	Breslau	99½	99½
Uso	Leipzig	103⅜	—
2 Monat	Frankfurt a. M.	103¼	—
3Wochen	Petersburg Bco. Rot.	27¼	—
3Wochen	Riga dito	—	—
Holländ. Rand-Dukaten alte à 2¾		118	—
dito neue		—	—
Friedrichsd'or		114¾	114⅛
Diskonto		—	—

Wechsel- und Geld-Course.

Berlin, den 25. August 1820.

		Briefe.	Geld.
Kurz	Amsterdam	141⅛	—
2 Monat	dito	140⅜	—
Kurz	Hamburg	—	152⅛
2 Monat	dito	—	150¾
3 Monat	London	6:25½	
2 Monat	Paris	80¼	80 1/12
2 Monat	Wien	102⅞	—
2 Monat	Augsburg	103	
2 Monat	Breslau	99 5/12	99⅛
Uso	Leipzig	—	102¾
2 Monat	Frankfurt a. M	102⅞	—
3Wochen	Petersburg	—	29 11/12
3Wochen	Riga	—	—
Alte holländ. Dukaten		18	
Neue dito		19¼	
Friedrichsd'or		13½	12⅝
Diskonto		3	4

Staatspapiere.	ZF		
Staatsschuldscheine	4	97 11/12	97¼
Preuß. Engl. Anleihe 1818 à 6¾ Thl.	5	103¼	—
Preuß. Engl. Anleihe 1822 à 6¾ Thl.	5	104¼	—
Kurmärk. Oblig. mit lauf. Coup.	4	97	
. . . . .			
. . . . .			

Ostpreußische Pfandbr
Pommersche dit
Kur- u. Neumark dit
Schlesische dit
Pommer. Domain. dit
Ostpreuß. dito dit

1. Anmerkung. Der
gemindert. Die
Procent.

2. Anmerkung. Es ist
Kurszettel zum Ber

§. 109. Was die
Geld betrifft, so ist hier
städte A und B Wechse
unveränderliche, feste
eine veränderliche, nach
Zwischen Berlin und H
summe (Valuta) von
bis 152 oder 153 Thl.
Valuta ist. Man findet
und eine veränderliche
hat Hamburg die bestä
zahlt dafür 186 bis 18
3 Francs, für welche
Wer in Paris Wechsel
Valuta von 100 Mark
so wird hier die bestä
Eben so gilt in Paris
3 Francs 55 bis 56 Cen
feste Summe von 300 Fr
als eine Waare ansehen,
bene Verhältniß der feste
Wechselkurs nennt. In
liche Wechselsumme ange
vorausgesetzt. In vorsteh

in Amsterdam 100
= Hamburg 100
= London 1
= Paris 300
= Wien 100
= Augsburg 100
= Breslau 100
= Leipzig 100

Digitized by Google

image
not
available

in Frkf. a/M. 100 Thl. Wechselg. oder 150 Gld. Konv.-Geld.
» Petersburg 100 Rubel in Banknoten, d. h. in Scheinen, welche auf die Petersburger Bank lauten.

Anmerkung. Auf Hamburg und Riga sind gerade an diesen Tagen keine Course für Briefe notirt worden, auch bei mehrern andern Städten steht für den Verkauf von Wechselbriefen kein Cours angegeben.

§. 110. Die Ueberschrift — Briefe — zeigt an, daß man für die in der Zahlensäule angegebenen Summen Wechselbriefe kaufen kann; die Ueberschrift — Geld — aber bedeutet, daß Wechselbriefe für die darunter stehenden Summen zu verkaufen sind. Z. B. Will jemand in Berlin einen Wechselbrief auf London kaufen, so muß er 6 Thl. 24 (oder 25½) Sgr. für 1 Pfund Sterling bezahlen; hat er aber einen engl. Wechsel zu verkaufen, so erhält er für jedes Pfund Sterl. 6 Thl. 23¾ Sgr.

Anmerkung. In großen Handelsstädten gibt es vereidete und von der Obrigkeit angestellte Personen, welche Auskunft geben, bei wem und in welchem Course Wechsel zu kaufen und zu verkaufen sind. Sie heißen Wechselmakler (courtiers) und sie erhalten für ihre Bemühung gewöhnlich ½ proc. (½ %) oder ½ proc. 1 von 1000 (1 pro mille, 1 ‰) als Maklerlohn (courtage oder sensarie). Uebrigens gibt es auch Makler, die für andere Personen Käufe und Verkäufe von Waaren abschließen und dafür eine gewisse Gebühr als Maklerlohn ziehen.

§. 111. a vista, a vue oder nach Sicht bedeutet, daß ein Wechsel gleich nach Vorzeigung oder doch an demselben Tage bezahlt werden muß. Oft ist wohl bemerkt K. S. kurze Sicht (a court, courts jours), in 8 oder 14 Tagen zahlbar; langsichtig heißt ein Wechsel, welcher erst über 2 bis 3 Monat zahlfällig ist. Enthält ein Wechselbrief die Worte présix (presisso), so muß er ohne Verzug an demselben Tage, an welchem er vorgezeigt wird, bezahlt werden.

Bei dem Wechselgeschäft kommt, wie oben angemerkt ist, auch noch der Ausdruck „Respekttage oder Diskretionstage" vor. Man versteht darunter eine Zeit von einigen Tagen über den Verfalltag des Wechsels hinaus, so daß der Wechsel erst einige Tage nach dem Verfalltage bezahlt zu werden braucht. Berlin hat z. B. 3 Respekttage, Hamburg 12, Frankfurt a/M. 4, Amsterdam, Köln und Elberfeld keine. Uso heißt die gewöhnliche Wechselfrist. Wechsel, welche in der Messe zahlbar sind, erhalten keine Respekttage. Zuweilen wird die Zahlung eines Wechsels über die Verfallzeit prolongirt oder verschoben, welches im Wechselbriefe besonders angemerkt wird. Der etwa daraus entstehende Schaden fällt alsdann auf den Inhaber des Wechsels.

§. 112. Unter den verzeichneten Coursen steht nun noch der Werth von einigen Goldmünzen angegeben. Holländ. Rand-Dukaten, alte zu 2¾ Thl. stehen 18 proc. höher als cour. Gold oder 100 Thl., holländ. Duk. zu 2¾ sind 118 Thl. Cour.; eben so sind 100 Thl. in Friedrichsd'or zu 5 Thl. vom Jahr 1825 = 114½ Thl. Cour. Der Werth des Friedrichsd'or ist demnach: 100 : 114½ = 5 : x oder 5 Thl. 21¾ Sgr.; den jetzigen Werth (Jan. 1840) findet man nach dem Ansatze 100 : 113½ = 5 : x, wo x = 5 Thl. 20 Sgr. Weit kürzer verfährt man nach folgender Regel: Addire zum Agio die Hälfte desselben, so zeigt die Summe die Anzahl Silbergroschen, welche der Friedrichsd'or über 5 Thl. steht.

image
not
available

gegeben werden. Bei der englischen Anleihe ist noch zu merken, daß für eine solche Obligation (Schuldschein) von 100 Thl., wegen des höhern Zinsfußes von 4 proc., baar $103\frac{1}{4}$ oder $104\frac{1}{4}$ bezahlt werden. In großen Handelsstädten wird oft sehr bedeutender Handel mit Staatspapieren, sowol ausländischen als inländischen, getrieben. Da nun der Stand derselben oft schnell wechselt, so kann jemand, der solchen Effektenhandel treibt, oft in kurzer Zeit viel gewinnen, aber eben so leicht auch viel verlieren.

§. 114. Wenn zwei Summen Geldes an zwei verschiedenen Orten gleichen Werth haben, so sagt man, die Summen stehen pari (gleich). Gilt z. B. in Elberfeld der holl. Gulden allgemein 16 Sgr., so ist dieß das Pari dieser Münzsorten und $133\frac{1}{3}$ Thl. würden demnach das Courspari zwischem Amsterdam und Elberfeld sein, d. h. 250 Gulden in Amsterdam wären dann gerade so viel werth als $133\frac{1}{3}$ Thl. in Elberfeld. Man unterscheidet noch ein inneres (reelles) und ein äußeres Pari, von welchem weiter unten die Rede sein wird. Die Wechselcourse weichen aber nach Umständen mehr oder weniger vom Courspari ab. Folgende Beispiele werden den Grund dieses Steigens und Fallens der Course anschaulich machen. Angenommen, Elberfeld habe in London viele Waaren, etwa für 50000 Pfund Sterling gekauft. Die baare Versendung dieses Geldes nach London würde nicht allein beträchtliche Kosten verursachen, sondern auch noch Besorgniß wegen richtiger Ueberkunft erregen. Elberfeld wird daher suchen, diese Summe durch Wechsel zu übermachen. Natürlich werden jetzt Briefe auf London stark gesucht. Stand bisher der Cours zwischen beiden Orten 6 Thl. 24 Sgr., so wird er jetzt leicht auf 6 Thl. 28 Sgr. oder gar auf 7 Thl. steigen. Dennoch wäre es vielleicht gerathener, Wechselbriefe in diesem höhern Course einzukaufen, als das Geld baar zu versenden. Elberfeld hätte freilich in diesem Falle einen nachtheiligen Cours.

§. 115. A in Elberfeld hat Pariser Briefe zu $87\frac{1}{2}$, die über 3 Monat zahlbar sind, wünscht aber jetzt baares Geld dafür zu haben, weil er gerade Gelegenheit zu einem vortheilhaften Ankaufe hat. Er verkauft daher dem B, welcher französische Briefe sucht, diesen Wechsel zu 87.

§. 116. Wenn ein Staat von einem Kriege bedroht wird, so stockt der Verkehr mit dem Auslande (wenn er etwa nicht mittelbar durch ein neutrales Land unterhalten wird) und die Wechsel fallen im Course. Befürchtete Preußen z. B. einen Krieg mit Rußland, so würde jeder Kaufmann in Preußen eilen, seine Geschäfte mit Rußland, wo möglich noch vor dem Ausbruche des Krieges ins Reine zu bringen, und seine russischen Briefe unter dem bisherigen Course zu verkaufen. Am meisten würde dieß Einfluß auf den Stand der Staatspapiere haben. Jeder würde solche zu verkaufen suchen, und sie würden daher im Werth sehr fallen. Diese und andere Umstände verursachen das Steigen und Fallen der Wechselcourse und Staatspapiere.

Anmerkung. Gewöhnlich wird dieß auch in den Zeitungen mitgetheilt. Wenn aber das Steigen und Fallen der Aktien einer Staatsbank nicht von 100 (proc.) angegeben wird, so ist es für viele Zeitungsleser unverständlich, weil

Digitized by Google

ihnen die Parisumme einer solchen Aktie unbekannt ist. Eine Aktie der holl. ostind. Kompagnie beträgt 500 Pfund vlämisch oder 3000 Florin, der holl. westind. Kompagnie 6000 Gulden; bei der Bank in Koppenhagen 400 Thl. Species; bei der Londoner Bank 100 Pfund Sterling. bei der Bank in Paris 1000 Franes. Um zu zeigen, welchen Einfluß die politischen Verhältnisse auf den Stand der Aktien der Staatsbank haben, führe ich den verschiedenen Stand der Pariser Bankaktien vom Jahr 1813 und 1814 an. Am 1. April standen diese 1173 Fr. 75 Cent.; am 7. Mai nach dem Siege der Franzosen bei Lützen 1195 Fr. 50 Cent.; am 28. August nach dem Beitritt Oestreichs zu den Verbündeten 1135; am 4. Sept. nach dem Sieg der Franzosen über die Oestreicher 1140; am 29. Oktober nach der Niederlage der Franzosen bei Leipzig 895; am 30. Dezember nach dem Rückzug der Franzosen über den Rhein 705 Fr. — 1814 am 18. Januar war der Stand der Aktien 560, am 23. Januar, da alles auf die Bank losstürmte, um die in Händen habenden Aktien zu realisiren, 500. Die Bank war zugleich autorisirt worden, täglich nur für 500000 Fr. Bankbillets einzuwechseln. Nach den Siegen der Franzosen im Februar stiegen sie am 16. d. M. wieder auf 580, am 26. auf 750 Fr.; am 9. März nach der Niederlage der Franzosen bei Laon und Bar sur Aube 700, am 12. März 680, am 25 April nach der Entthronung Napoleons 907, am 24. April 950, am 6. Juni nach unterzeichnetem Frieden 1085, am 10. Juni 1150 Fr. u. s. w. Gewöhnlich wird dem Stand der Bankaktien noch das Wort consolidirte hinzugefügt. So hieß es z. B. am 7. Sept. 1814 von Paris: Stand der Bankaktien 1215. — Consolidirte 5 proc. 79 Fr. 15 Cent. Consolidirt oder fundirt heißt nämlich eine Aktie einer Staatsbank, wenn für deren Zinsbetrag bestimmte Staatseinkünfte angewiesen sind, oder auch wenn die Regierung für eine Aktie einen bestimmten Werth anerkannt und zugesichert hat. Hier war der Zinsfuß 5 proc. und für 79 Fr. 15 Ct. baar konnte man eine solche Aktie von 100 Fr. an Werth kaufen. Englische fundirte Schulden sind solche, für deren jährliche Zinsenzahlung sich die Regierung verpflichtet, sich aber meistens vorbehält, das Kapital zurückzubezahlen, wenn sie es für gut findet. $^4/_5$ der englischen Staatsschuld besteht in solchen fundirten Schulden.

Im Allgemeinen kann man sagen: wenn Wechselbriefe stark gesucht werden, so steigt der Cours; wird baares Geld sehr gesucht, so fällt derselbe; im Fall aber Briefe und Geld ziemlich gleich stark gesucht werden, so wird auch der Cours ganz oder nahe pari stehen.

§. 117. Die Wechselrechnung lehrt im Allgemeinen eine Geldsorte in eine andere zu berechnen. Gewöhnlich wird sie eingetheilt in die inländische und ausländische. Jene besteht in einfachen Münzreduktionen, und wird auch wohl gemeiner Wechsel (cambio commune) genannt; diese aber lehrt, wie man nach gegebenen, oft sehr zusammengesetzten Verhältnissen inländisches und ausländisches Geld gegen einander berechnen, und durch eine besondere Art von Anweisungs- oder Schuldscheinen, Wechselbriefe genannt, bezahlen oder einziehen kann. Sie heißt auch Hauptwechsel (cambio reale). Die Kenntniß des ganzen Wechselwesens ist besonders dem Kaufmanne nothwendig. Die Berechnung der hieher gehörigen Aufgaben geschieht meistens am vortheilhaftesten nach der Kettenregel. Sie hat an sich nichts Eigenthümliches, erfordert aber nothwendig einige Kenntniß der darin vorkommenden Kunstausdrücke, der in- und ausländischen Münzsorten, des Courszettels u. s. w. Als besondere Kapitel kommen noch vor die Wechselpari- und die Arbitragen-Rechnung, von welchen weiterhin die Rede sein wird.

Digitized by Google

A. Inländische Wechselreduktionen.

§. 118. Verzeichniß einiger Münzsorten.

	24 Guldenfuß.		20 Guldenfuß.		In Friedrichsd'or zu 5 Thl.	
	Gulden.	Kreuzer.	Gulden.	Kreuzer.	Thaler.	Sgr.
Friedrichsd'or, August Karl-Georgsd'or, oder Pistolen überhaupt	9	41	8	5	5	—
Deutsche Dukaten	5	35	4	40	2	$28^1/_4$
Mard'or zu 2 Goldgulden .	8	—	6	40	4	$6^1/_2$
Neue Louisd'or	11	7	9	18	5	24
20 Franken-Stücke	9	27	7	54	4	$25^3/_4$
Souveraind'or zu 3 Duk .	16	18	13	38	8	$7^1/_2$
Karolin zu 3 Gologulden	12	—	10	—	6	10
					Nach dem preuß. Thl.	
Preußische Thaler	1	44	1	27	1	—
Französische Kronenthaler .	2	45	2	18	1	$16^1/_2$
Brabanter	2	42	2	15	1	16
Konventionsthaler	2	24	2	—	1	12
Fünffranken-Stücke	2	21	1	58	1	$10^1/_2$

1. Anmerkung. Nach dem 24 Guldenfuß sollte eigentlich der franz. Kronenthaler 2 Gulden 42 Kreuzer und der brab. Kronenthaler 2 Gulden 48 Kreuzer gelten. Der oben angegebene Werth ist aber seit 1793 gesetzlich bestimmt. Der äußere Cours der gangbaren Münzsorten ist sehr veränderlich. Jedoch wird an manchen Orten das Steigen und Fallen derselben nicht an der Münzsorte selbst, sondern von 100 angegeben. So stehen z. B. Friedrichsd'or jetzt $13^1/_3$ proc. gegen Cour. d. h. 100 Thl. in preuß. Pistolen zu 5 Thl. sind $113^1/_3$ Thl. in Silber.

In Wechselzahlungen wird, wie oben angemerkt, der Karolin zu $9^1/_4$ Florin und in Waarenzahlungen zu 11 Florin gerechnet, so daß 46 Rthl. oder Gulden Wechselgeld = 55 Rthl. oder Gulden Waarenzahlung im 24 Guldenfuß.

2. Anmerkung. In Betreff der Goldmünzen ist noch zu merken, daß der Werth des Goldes gegen Silber veränderlich ist. So stand früher der Dukat im 24 Guldenfuß 5 Gulden. 1824 im Februar wurde er in Frankfurt zu 5 Fl. 38 Krz. notirt. In vorstehendem Verzeichniß sind alle Goldmünzen gegen Pistolen oder Friedrichsd'or zu 5 Thl. berechnet. Der Werth derselben, wie sie in öffentlichen Kassen angenommen werden, ist besonders bei fremden Geldsorten davon abweichend. Im 24 Guldenfuß steht von den meisten der Werth (von 1826 im Febr.) angegeben, nach welchem sie in dem Verhältnisse 55 : 46 in den 20 Guldenfuß berechnet sind.

§. 119. 1) Wie viel betragen 100 Stück der vorgenannten Münzen in Gulden und Thalern nach den drei angegebenen Währungen?

Digitized by Google

Aufl. ? : 100 Pist.
1 : $9^{41}/_{60}$ Gld. im 24 Guldenfuß.

Antw. $968^{1}/_{3}$ Gldn.

? : 100 Pist.
1 : $8^{1}/_{12}$ Gld. im 20 Guldenfuß.

Antw. $808^{1}/_{3}$ Gldn.

? : 100 Pist.
1 : 5 Thl.

Antw. 500 Thl.

? : 100 Dukaten
1 : $5^{7}/_{12}$

Antw. $558^{1}/_{3}$ Gld. u. s. w.

2) Jemand hat 100 Karolin zu $11^{1}/_{10}$ Fl. und will dafür franz. Kronenthl. zu $2^{3}/_{4}$ Fl. einwechseln; wie viel erhält er derselben?

Aufl. ? : 100 Karolin
1 : $11^{1}/_{10}$ Fl.
$2^{3}/_{4}$: 1

Antw. $403^{7}/_{11}$ Kronenthl.

3) A ist schuldig 1000 Gulden in Konventionsth. zu 2 Gulden, bezahlt aber in preuß. Pistolen; wie viel Stück machen diese?

Aufl. Der Werth des Konventionsth. von 2 Gulden zeigt den 20 Guldenfuß an, daher muß der Werth einer Pistole auch nach dem 20 Guldenfuß genommen werden. Also

? : 1000 Gulden
$8^{1}/_{12}$: 1 Pist.

Antw. $123^{69}/_{97}$ Pist.

4) Jemand hat 300 Thl. in Pistolen zu 5 Thl. zu bezahlen, welche 15 proc. Agio thun, wie viel Thl. Cour. muß er bezahlen?

Aufl. ? : 300 Thl. in Pist. zu 5.
100 : 115

Antw. 345 Thl.

Anmerkung. Man unterscheidet im Handel gut und schlecht Geld. Jenes erhält seinen Vorzug durch seinen bessern innern Gehalt oder durch sein edleres Metall. Bei der gegenseitigen Verwechselung des guten und schlechten Geldes kommen die Wörter Agio und Diskonto vor. Wer schlechtes Geld ausgibt, um gutes zu erhalten, muß etwas mehr bezahlen, als sonst der Werth beträgt und dieser Ueberschuß wird Agio oder Aufgeld genannt (s. §. 101). Das Agio wird gewöhnlich proc. bestimmt, wobei besonders zu merken ist, daß für das gute Geld immer 100 gesetzt wird. Wenn es also heißt, Pistolen thun 15 proc. Agio, so will man damit sagen: 100 Thl. in Pistolen sind 115 Thl. in Silbermünzen, und das Agio beträgt hier 15 Thl. Dagegen erhält man hier für 115 Thl. Cour. nur 100 Thl. in Gold, und der Unterschied von 15 Thl. wird nun nicht Agio, sondern Diskonto genannt. Um das Agio einer Summe guten Geldes zu berechnen, setzt man nach obiger Angabe 100 : 15, um aber den Diskonto bei einer Summe schlechten Geldes zu berechnen, für welches gutes eingewechselt wird, setzt man 115 : 15. Sowol das Agio als der Diskonto wird auf 100 und nicht in 100 berechnet. Es ist möglich, daß eine Geldsorte, z. B. Papiergeld, Aktien u. s. w. so schlecht wird, daß sie 100 proc. verliert. Hätte nun jemand davon etwa 1000 Thl. zu verkaufen, so würde er nach der Berechnung in 100 gar nichts erhalten, denn 100 : 100 — 100

d. h. 100 : 0 = 1000 zu x gibt 0 Thl. Ja wenn sie über 100 proc. verliert, das Diskonto also über 100 ist, so müßte der Verkäufer dem Käufer noch Geld zugeben, damit dieser die 1000 Thl. geschenkt nähme. Uebrigens wird der Abzug, den ein langsichtiger Wechsel erleidet, wenn er vor der Verfallzeit bezahlt wird, auch Diskonto oder Escompte genannt, und diskontiren heißt einen Wechsel vor der Verfallzeit nach Abzug der Zinsen einziehen.

5) Wie viel betragen 1200 franz. Kronenthl. zu $2\frac{3}{4}$ Gulden, in preuß. Thl. zu $1\frac{3}{4}$ Gld., wenn franz. Kronenthl. noch $1\frac{1}{2}$ proc. Agio thun?

Aufl. ? : 1200 franz. Kronenthl.
1 : $2\frac{3}{4}$ Gulden
100 : $101\frac{1}{2}$
$1\frac{3}{4}$: 1 Thl.

Antw. $191\frac{1}{4}$ Thl.

Sollte der Schüler diese Berechnung nicht einsehen, so lasse der Lehrer den kuranten Werth des franz. Kronenthl. nach dem Regel de tri-Satze 100 : $101\frac{1}{2}$ = $2\frac{3}{4}$: x berechnen, welcher sehr nahe 2 Gulden $47\frac{1}{2}$ Kreuzer beträgt, und dann die Kronenthl. in preuß. Thl. verwandeln.

6) 690 Thl. Cour. werden mit 15 proc. Diskonto gegen Pistolen zu 5 Thl. gewechselt; wie viel Stück erhält man?

Aufl. ? : 690 Thl. Cour.
115 : 100 Thl. in Gold
5 : 1

Antw. 120 Pistolen.

7) A in Elberfeld hat in Frankfurt 1000 Gulden zu fordern. Diese kann er empfangen a) in brab. Kronenthl. zu $2\frac{7}{10}$ Fl. mit $1\frac{1}{4}$ proc. Agio und in Elberfeld ausgeben zu 46 Sgr. b) in Pistolen zu 9 Fl. mit 15 proc. Agio und in Elberfeld ausgeben zu $5\frac{3}{4}$ Thl. Welche Münzsorte ist für ihn am vortheilhaftesten?

Aufl. a) ? : 1000 Gulden
$2\frac{7}{10}$: 1 brab. Kronenth.
$101\frac{1}{4}$: 100
1 : $1\frac{8}{15}$ Sgr.

a) Antw. 560 Thl. 26 Sgr. 8 Pfg. beinah.

b) ? : 1000 Gulden
9 : 1 Pist.
115 : 100
1 : $5\frac{3}{4}$

b) Antw. 555 Thl. 16 Sgr. 8 Pfg.

b von a abgezogen bleibt 5 Thl. 10 Sgr., welche A mehr erhält, wenn er die Forderung in brab. Kronenthl. bezahlt nimmt.

8) Wenn in Frankfurt die Pistole $9\frac{3}{4}$ Fl. gilt und der preuß. Thl. $1\frac{3}{4}$ Fl.; wie stehen (rentiren) dort Pistolen gegen preuß. Cour.?

Hier muß der Schüler darauf aufmerksam gemacht werden, daß, wenn die beiden Münzsorten — Pistolen und Thaler — ihrem festgesetzten Werthe nach in gleichem Grade stiegen und fielen, gar kein Unterschied darin wäre, ob eine bestimmte Summe in Pistolen oder Thalern bezahlt würde. Da dieß aber nicht der Fall ist, das Steigen

Digitized by Google

und Fallen der Münzen gar nicht verhältnißmäßig geschieht, so muß auch ein Unterschied darin sein, ob eine Summe in dieser oder jener Münzsorte bezahlt wird. Hier haben wir nun 100 Thl. in Pistolen zu 5 Thl., welches gerade 20 Pistolen ausmacht. Diese betragen aber $20 \times 9^3/_4 = 195$ Gulden. Sollen diese in preuß. Thl. verwandelt werden, so müssen wir mit $1^3/_4$ dividiren, macht $111^3/_7$ Thl. Also machen 100 Thl. in Pistolen zu 5 Thl. $111^3/_7$ Thl. Die Pistolen thun daher $11^3/_7$ proc. Agio. Nach der Kettenform heißt der Ansatz:

?	:	100 Thl. in Pist. zu 5
5	:	1 Pist.
1	:	$9^3/_4$ Gulden
$1^3/_4$	:	1 Thl.

Antw. $111^3/_7$ Thl.

9) Wie viel proc. stehen Dukaten höher als preuß. Cour., wenn der gesetzmäßige Werth $2^3/_4$ Thl. und in Cour. $3^1/_5$ Thl. ist?

?	:	100 Thl. in Duk.
$2^3/_4$	:	1 Duk.
1	:	$3^1/_5$ Thl. in Silbermünze

Antw. $116^4/_{11}$ Thl.

Also thun Dukaten $16^4/_{11}$ proc. Agio gegen den couranten Werth.

10) Pistolen stehen gegen preuß. Cour. $12^1/_2$ proc., dieses verliert gegen sächsisches Geld 5 proc.; wie viel proc. gewinnen demnach preuß. Pistolen gegen sächsisches Geld, mit andern Worten: wie viel betragen demnach 100 Thl. in preuß. Pistolen in sächs. Währung?

Ansatz.	?	:	100 Thl. in preuß. Pist.
	100	:	$112^1/_2$ preuß. Cour.
	105	:	100 Thl. sächs. convent.

Antw. $107^1/_7$ Thl. sächsisch.

B. Ausländische Wechselreduktionen.

§. 120. I. Vorbemerkung. Zunächst geht diese, so wie die vorige Abtheilung den Kaufmann an, und eine vollständige Kenntniß des ganzen Wechselwesens gehört für kein Schulbuch, und kann auch schwerlich von einem Lehrer, wenn er nicht etwa selbst Kaufmann gewesen ist, in der Schule erlernt werden. Wer ausführliche Belehrung darüber wünscht, muß sie in andern Büchern suchen. Eigene Erfahrung gibt aber hier, wie überall, die beste Einsicht, und jede Praxis erlernt sich am besten durch die Praxis. Dennoch ist der kaufmännische Verkehr, so wie das kaufmännische Verfahren in allen Arten des Erwerbs so allgemein geworden, daß einige Kenntniß von Wechsel dem heranwachsenden Jüngling nicht wol erlassen werden kann. Der Lehrer mache die Schüler darauf aufmerksam, welch einen großen Vortheil die Zahlung durch Wechselbriefe vor der baaren Versendung habe; wie der Verkehr dadurch erleichtert, beschleunigt und gesichert wird. Er mache sie dann nach und

nach mit dem Nothwendigsten vom Wechselwesen bekannt. Dahin rechnen wir, Kenntniß a) der nothwendigsten Kunstausdrücke, z. B. Agio, Cours, Valuta, Pari, Tratte, Remesse u. s. w. b) des Courszettels, c) der Berechnung der Wechselaufgaben nach demselben. So oft es angeht, stelle der Lehrer bei der Erklärung einen wirklichen Fall auf. Z. B. die Aufgabe sei folgende: A in Elberfeld ist in Paris 2400 Fr. schuldig, bezahlt dieselben mit einem Wechsel im Course zu 82; wie viel Thl. kostet ihm der Wechsel? Der Lehrer erklärt dieß auf folgende Weise: Du, Karl, bist dem Herrn Louis in Paris 2400 Fr. schuldig. Auf welche Weise wirst du ihm nun diese bezahlen? Willst du etwa hingehen, und diese Summe baar überbringen? Das wäre sehr mühsam und kostspielig. Oder willst du dieß Geld etwa durch die Post schicken? Das ging eher an. Doch würdest du nicht allein viel Porto bezahlen müssen, sondern du könntest auch nicht ganz sicher sein, daß Herr Louis das Geld richtig erhielt. Da weiß ich nun einen bessern Vorschlag. Herr Emil in Paris ist mir 10000 Fr. schuldig; bezahl du die 2400 Fr. an mich, so geb ich dir einen Brief, in welchem ich dem Herrn Emil auftrage, an Herrn Louis 2400 Fr. zu bezahlen. Diesen Brief schickst du an Louis, welcher denselben dem Emil vorzeigt und von demselben die bestimmte Summe erhält, und mir dieselbe auf Rechnung setzt. Jetzt kommt es nun noch darauf an, wie viel preuß. Thl. du an mich bezahlst. Für jede 300 Francs gibst du mir 82 Thl. 2400 sind 8 mal 300, also erhalte ich von dir 8mal 82 Thl. = 656 Thl. — Auf diese Weise findet sich der Schüler leicht zurecht.

Anmerkung. Die nöthigste Kenntniß über das Wechselgeschäft, so viel nämlich davon der Lehrer in höhern Elementar- und Bürgerschulen zum Unterricht bedarf, ist in den letzten Paragraphen mitgetheilt worden. Es folgen hier nun einige Courszettel, nebst Aufgaben darüber und deren Berechnungen. Der Lehrer versuche selbst mehrere Wechselaufgaben darnach zu bilden, und nehme solche wo möglich aus dem wirklichen Leben. Unser zweites Uebungsbuch enthält deren eine hinreichende Anzahl, von welchen mehrere aus der wirklichen kaufmännischen Praxis genommen sind. —

II. Amsterdam.

empfängt in		gibt dafür
Antwerpen	*102½ Fl. Wechselgeld	100 Fl. Cour.
Augsburg	1 Thl. Cour.	*35 Stbr. "
Berlin	1 Liv. banco	*45 " "
Frankf. a/M.	1 Rthl. Wechselgeld	*35 " "
Genua	1 Pezza 5¾ Lire bc.	*96 Den. vlám.
Hamburg	1 Wechselthl. zu 2 Mark bc.	*35 Stbr. vlám.
Leipzig	1 Thl. Konv. Cour. oder Wechselg.	*36 " "
Lissabon	1 Crusado	*45 Den. vls.
Livorno	1 Pezza d'otto zu 6 Lire	*93¾ " "
London	1 Pfund Sterling	*37⅓ Schill. vls.
Madrid	1 Wechselduk. zu 375 Marav. d. pl.	*100 Den. vls.
Neapel	1 Ducato del regno	*78¾ " "
Venedig	1 Ducato Banco	*92½ " "
Paris	3 Francs	*56 " "

Digitized by Google

empfängt in		gibt dafür
Petersburg	1 Rubel (in Banknoten)	*9 1/16 Stbr.
	(oder auch wohl 1 Silberrubel für	37 1/2 Stbr.)
Wien	1 Rthl. Cour. in 20r	*35 "

1. Anmerkung. Bei folgenden Städten wird seit einiger Zeit der Kurs in andern Münzsorten notirt.
Augsburg 35 d. h. 35 Gld. sind 20 Rthl. oder 30 Gld. Conv. Cour. oder wenn der Kurs 35.36 steht, so heißt das 35 Gld. und 36 Cents = 20 Thl. oder 30 Gld.
Frankfurt 35 mit mehr oder weniger Cents, ist eben so zu verstehen wie bei Augsburg.
Genua 47 . 75 d. i. 47 Gld. 75 Cents für 100 Lire nuove di Piemont.
Hamburg 35, + — Cents sind 40 Mark.
Lissabon 37 . 50 d. i. 37 Gld. 50 Cents = 40 Wechselcruzaden.
Livorno 93, 75 d. i. 93 Gld. 75 Cents für 40 Pezza oder Piaster
London 11,87 1/10 d. i. 11 Gld. 87 1/2 Cents für 1 Pfdstrlg.
Madrid 98,50 d. i. 98 Gld. 50 Cents für 40 Dukati de Cambio
Neapel 78,75 d. i. 78 Gld. 75 Cents für 40 Dukati di Regno
Paris 56, d. i. 56 Gulden für 120 Francs.
Petersburg 10,25 d. i. 10 Gld. 25 Cents für 20 Rubel in Banknoten.
Wien 35,50 d. i. 35 Gld. 50 Cents für 20 Thl. oder 30 Gld. Cour.

Bei den meisten Kursen besteht diese Veränderung bloß in einer Reduktion auf höhere Münzsorten. Z. B. Augsburg; wenn hier der Kurs notirt ist: 1 Thl. = 35 Stüver holl., so versteht sich von selbst, daß 20 Thl. in Augsburg 35 Gld. sind, weil 20 Stüver auf 1 holl. Gulden gehen. Eben so mit andern Städten. Seit 1840 hat auch die bisher übliche Wechselvaluta zwischen Paris und Amsterdam aufgehört. Jetzt wird notirt: für 100 niederl. Gulden 209 oder 210 m. o. w. Francs. Das Silberpari beträgt 213,62 Francs.

2. Anmerkung. Die veränderliche Valuta ist mit einem Sternchen * bezeichnet. Die ehemalige Bancowährung hat aufgehört; seit 1823 wird nach Courant-Währung gerechnet. Der Gulden wird in Centimen oder Cents eingetheilt, 100 Cents = 1 Gld.

III. Frankfurt a/M.

empfängt in		gibt dafür
Amsterdam	250 Gulden Cour.	*140 Wechselthaler
*Berlin	1 Thaler	*104 Krz. im 24Gldf.
Bremen	100 Thl. in Louisd'or zu 5 Thl.	*110 Thl. Wechselg.
Hamburg	300 Mark Banco	*146 2/3 "
Leipzig	100 Thl. Wechselgeld	*99 3/4 "
London	1 Liv. (Pfd.) Sterl.	*150 Batzen "
Paris	300 Francs	*80 Thl. "
Wien	100 Gld. Cour. in 20r. 20 Gldf.	*101 1/4 Thl.

* Der Kurs von Frankfurt auf Berlin hat sich seit dem 1. Jan. 1843 geändert. Gegen die angenommene feste Wechselsumme von 100 Gld. im 24 Gldfß. Waarenzahlung wird in Berlin 60 Thlr. pr. Cour. zu 104 Kreuzer als entsprechende Werthsumme gesetzt. Bei dem Kurse der preuß. Staatsschulden wird indeß der Thaler, wie auch bisher üblich, zu 105 Kreuzer gerechnet.

IV. Hamburg.

empfängt in		gibt dafür
Amsterdam	*104 Thl. Cour.	100 Thl. Bco.
"	*104 Fl. "	120 Mark "
Breslau und Berlin	*156 Thl. "	300 " "

empfängt in		gibt dafür
Cadix und Madrid	1 Duk. zu 375 Marav.	*90 Pfen. vls.
Frankf. u. Augsb.	*147 Thl. Wechselgeld	100 Thl. bco.
Genua	1 Pezza zu 5¾ Lire	*81¼ Pfen. vls.
Leipzig	*147 Thl. Wechselgeld	100 Thl. bco.
Livorno	1 Pezza d'otto zu 6 Lire	*88 Pfen. vls.
Lissabon	1 Crusado	*37 " "
London	1 Liv. Sterl.	*36 Schill. "
Neapel	1 Duc. del regno	*75 Pfen. "
Paris	3 Francs	*26 Schill. lüb. bco.
Wien	*146¾ Thl. cour. in 20r	100 Thl. bco.

Neuere Veränderungen sind:

Amsterdam	34⁸⁰/₁₀₀ d. i. 34 Gld. 80 Cents für 40 Mark.
Cadix u. Madrid	45 d. i. 45 Schill. lüb. bc. für 1 Duk. d. Camb.
Genua	187 d. i. 187 Lire nuove für 100 Mark bco.
Livorno	43¾ d. i. 43¾ Schill. lüb. bco. für 1 Pezza da 8 Reali.
Lissabon	44 d. i. 44 " " " " 1 Milreis.
London	13 . 12¾ d. i. 13 Mark 12¾ Sch. bc. für 1 Pfd. Sterl.
Paris	186¾ d. i. 186¾ Francs für 100 Mark bco.

V. Leipziger Wechselkurszettel vom 29. März 1832.

Leipzig wechselt auf	Kurs. Briefe.	Kurs. Geld.	Erklärungen.
Amsterdam k. S.	—	142½	d. i. Leipz. gibt 142½ Thl. Wechselg. für 250 Gld. holl. Cour.
Augsburg	—	101¼	" Leipz. gibt 101¼ Thl. Wechselg. für 150 Gld. Conv. Cour.
Berlin	103¼	—	" Leipz. gibt 100 Thl. Wechselg. für 103¼ Thl. pr. Cour.
Bremen	110	—	" Leipz. gibt 110 Thl. Wechselg. für 100 Thl. in Louisd. à 5.
Frankfurt a/M. .	100⅞	—	" Leipz. gibt 100⅞ Thl. Wechselg. für 100 Thl. Frkf. Wechselg.
Hamburg	149⅜	—	" Leipz. gibt 149⅜ Thl. Wechselg. für 300 Mark bco.
London	6. 19½	—	" Leipz. gibt 6 Thl. 19½ Ggr. Wechselg. für 1 Pfd. Sterl.
Paris	80	—	" Leipz. gibt 80 Thl. Wechselgeld für 300 Francs.
Wien	102	—	" Leipz. gibt 102 Thl. Wechselg. für 100 Thl. Conv.

Digitized by Google

VI. London.

empfängt in		gibt dafür
Amſterdam	*38½ Schill. vls.	1 Liv. (£.) Sterl.
Cadix u. Madrid	1 Peſo de plata antigua (alter Wechſelpiaſter)	*40 Pence
Frankfurt	*144 Batzen	1 Liv. Sterl.
Genua	1 Pezza zu 5¾ Lire f. bco.	*48 Pence
Hamburg	*34 Schill. vls. bco.	1 £. (Liv.) Sterl.
Liſſabon	1 Mille Rees od. 1000 Rees	*60 Pence
Livorno	1 Pezza d'otto	*48 »
Neapel	1 Ducato del regno	*42 »
Paris	*24 Francs 40 Cent.	1 Pfd. Sterl.
Venedig	1 Dukato bco.	*50 Pence
Wien	*9 Gld. 45 Krz. in 20r Cour.	1 Pfd. Sterl.

In neuerer Zeit:

Amſterdam	12 . 2½	d. i. 12 Gld. 2½ Stüv. für 1 Pfd. Sterl.
Genua	25 . 85	» 15 Lire 85 Centesimi nuove für 1 Pfd.St.
Hamburg	14 . 1	» 14 Mark 1 Schill. für 1 Livre Sterl.
Venedig	47	» 47 Pence für 6 Lire auſtriace.

VII. Paris und Lion.

empfangen in		geben dafür
Amſterdam	56 Pfg. vls. Cour.	*3 Frcs.
Antwerpen	100 Francs	*99½ »
Augsburg	1 Gulden Cour.	*2 » 50 Ct.
Berlin	1 Thaler Cour.	3 » 55 »
Cadix	1 Doblon de pl. ant. oder 1 Wechſelpiſtole zu 4 Wechſelpiaſter oder 32 Reales de pl.	*15 » 15 »

In neuerer Zeit:

Augsburg	250	d. i. 250 Francs für 100 Gulden.
Genua	100⅛	d. i. 100⅛ » » 100 Lire nuove de Piemonte.
Mailand	85½	d. i. 85½ Centimes für 100 Lire auſtriace.

Frankfurt a. M.	100 Francs	*96	Frcs. 25	Ct.
Genua	100 Pezza zu 5¾ Lire	*472	» —	»
Hamburg	100 Mark bco.	*184	» —	»
Liſſabon	*540 Rees	3	» —	»
Livorno	1 Pezza d'otto	*5	» —	»
London	1 Liv. Sterl.	*25	» —	»
Mailand (Milano)	100 Lire ital.*	*97	» 50	»
Neapel	100 Ducato del regno	*420	» —	»
Wien	100 Gulden Cour. in 20r	*250	» —	»

1. Anmerkung. Auf Liſſabon und Porto werden jetzt Wechſel auf folgende Weiſe notirt: für 1000 Reis effekt. (d. i. in wirklichem Silbergeld) 5 Franc 50 Centimes. S. auch am Ende der erſten Anm. im Amſterd. Kurszettel.

2. Anmerkung. 81 Livres tournois = 80 Francs
Einfache, neue Louisd'or = 23 » 60 Cent.

Franz. Kronen (Kronenth.)	=	5 Francs	80 Cent.
Brab. Kronen	=	5 „	56 „
Preuß. Thaler	=	3 „	50 „

3. Anmerkung. Paris wechselt nach diesem Courszettel auf Frankfurt gegen die beständige Valuta von 100 Francs. Diese werden aber in Frankfurt nach den Verhältnissen 80 Francs = 81 Livres und 24 Livres = 1 Karolin oder neue Louisd'or in Gulden reducirt. In neuerer Zeit wird nach der festen Annahme 640 Francs = 297 Gulden in Karolin zu 11 Gulden gerechnet.

VIII. Petersburg (Archangel und Moskau).

empfangen in			geben dafür
Amsterdam	• 9¼	Stüber Cour.	1 Rubel.
Konstantinopel	•18	Paras	1 „
Hamburg	• 8½	Schill. bco.	1 „
London	• 9¼	Pence Sterl.	1 „
Paris	•99	Centimes	1 „

Anmerkung. Silberrubel gehen 13 auf eine feine Mark. Alle Zahlungen geschehen aber in Papiergeld, in Banknoten, welche von den verschiedenen russischen Banken gegen Kupfergeld eingelöset werden. Der Werth der Banknoten ist seit mehreren Jahren sehr gefallen. Der Wechselrubel steht aber 1 proc. höher als 1 Rubel in Banknoten. Die angegebenen Course stehen gegen Kupfergeld oder Banknoten; der wirkliche Silberrubel hat jetzt den Werth von 3½ Rubel Papier, oder auch 3½ Rubel in Banknoten. Die gesammte Masse von Papierrubel beträgt 595,776,410 Rubel.

Aufgaben über vorstehende Courszettel.

Anmerkung. Der Lehrer lasse bei jedem Courszettel die Hauptmünzsorte des Vaterlandes, — also im preußischen Staate Thaler, in Süddeutschland Gulden — in die Hauptmünzsorte einer ausländischen Handelsstadt, und umgekehrt die Hauptmünzsorte eines fremden Landes in die vaterländische Hauptmünzsorte berechnen. Dadurch lernt der Schüler den gegenseitigen Werth der fremden und einheimischen Münzsorten kennen, und er kann künftig mit einiger Sicherheit über den Preis ausländischer Fabrikate, Natur- und Kunstprodukte und über fremde Geldsorten überhaupt urtheilen. Die Berechnung der Wechselaufgaben hat an sich keine bedeutende Schwierigkeit, wenn nur der Schüler einmal den Courszettel recht kennt, und darnach zu arbeiten versteht. Entweder will man eine Geldsumme in fremden Münzsorten nach den Verhältnissen des Courszettels in einheimisches Geld, oder dieses in jenes oder eine fremde Geldsorte in eine andere fremde verwandeln. In diesen Fällen geschieht nun die Reducirung wieder entweder unmittelbar durch ein einziges gegebenes Verhältniß zwischen den bekannten und unbekannten Münzsorten, oder mittelbar durch mehrere gegebene Mittelverhältnisse. Ueber die Wechselarbitrage und die Berechnung des äußern und innern Pari wird weiterhin das Nöthige gesagt werden.

1) Wie viel gilt ein Berliner Thaler nach den angezeigten Coursen von 1825 jedes angemerkten Orts?

Antw. In Amsterdam 1 Fl. 15 Stbr.; in Hamburg 2 Mark beinahe, in London 2 Schill. Sterl. 10 Pf.; in Paris 3 Francs 67 Cent. u. s. w.

Ansatz. ? : 1 Thl. in Berlin
144¼ : 250 Fl.

? : 1 Thl.
151 : 300 Mark

u. s. w.

2) Wie viel Thaler und Silbergroschen gilt nach den Coursen von 1825 a) 1 holl. Gulden? b) 1 Franc in Paris? c) 1 russischer Rubel in Banknoten? d) 1 Mark in Hamburg?

Antw. a) 17 Sgr. 4 Pfg. b) 8 Sgr. 2 Pfg. c) 8 Sgr. 2 Pfg. d) 15 Sgr. 4 Pfg.

Ansatz.

? : 1 holl. Gld.	? : 1 Franc
250 : 144¼ Thl.	300 : 81⅝ Thl.
1 : 30 Sgr.	1 : 30 Sgr.

u. s. w.

Anmerkung. Eben so verfahre der Lehrer bei den übrigen Courszetteln. S. im 2. Uebungsb. die ersten Aufgaben zu den angeführten Courszetteln. Die zweite Abtheilung vom zweiten Bande unseres Handbuchs wird ein Verzeichniß der wichtigsten in- und ausländischen Geldsorten, Maße und Gewichte enthalten.

3) Wie viel muß Cöln für einen französischen Wechsel von 1200 Frcs. bezahlen, wenn der Cours auf Paris zu 81⅜ angenommen wird?

Ansatz.

? : 1200 Francs
300 : 81⅜ Thl.

327 Thl. 6 Sgr.

Anmerkung Die ehemalige kölnische Währung oder bergisch Courant, nach welcher der Reichsthaler zu 60 Stüber, der Stüber zu 2 Fettmännchen oder 4 Füchsen gerechnet wurde, hat nun in den Wechsel- und Handelsgeschäften gänzlich aufgehört und die preuß. Rheinprovinzen haben jetzt Münze, Maß und Gewicht wie Berlin. Bei den Wechselgeschäften in Elberfeld, Köln u. s. w. wird von einigen der Thaler in Cents oder Hunderttheile eingetheilt, daher auch in den Wechselcoursen dieser Städte hunderttheilige oder auch wol zehntheilige Brüche stehen. Statt 7 Thaler 24 Sgr. oder 7⅖ Thl. wird geschrieben 7 Thl. 80 Cents oder 7⁸⁰/₁₀₀ oder in Form eines Decimalbruchs 7,80. Der Thaler hat demnach 100 Cents. Diese Eintheilung gewährt in Wechselgeschäften, so wie im Handel überhaupt große Vortheile.

4) Wie viel Thaler in Staatsschuldscheinen betragen 100 Friedrichsd'or zu 5⅔ Thl, nach dem angegebenen Course zu 97⁷/₁₂?

Aufl.

? : 100 Friedrichsd'or
1 : 5⅔ Thl.
97⁷/₁₂ : 100

Antw. 580 Thl. 21 Sgr. 1 Pf.

5) Wie viel Pistolen zu 5⅔ Thl. erhält man für 1700 Thl. in schlesischen Pfandbriefen, wenn solche 104 stehen?

? : 1700 Thl. in Pfandbriefen
100 : 104 Thl. Cour.
5⅔ : 1 Pist.

Antw. 312 Pistolen.

6) A in Amsterdam kauft einen hamburger Wechsel von 1200 Mark mit ¾ proc. Spesen (Kosten) im Course zu 34; wie viel Florin mußte er dafür bezahlen?

Aufl.

? : 1200 Mark
Beständige Valuta 2 : 34 Stüver
20 : 1 Florin
100 : 100¾

Antw. 1027 Gulden 13 Stüver.

Digitized by Google

Hier mögen auch noch einige Bemerkungen über Berechnung der Spesen und anderer Kosten Platz finden.

Was im Allgemeinen die Kosten anbetrifft, so unterscheidet man proportionirte und unproportionirte Kosten. Letztere werden in der Handlung als besondere Nebenausgaben, etwa Briefporto, Verladungskosten, Fracht, für Emballage, Weggeld, Lagergeld u. s. w. einzeln aufgeführt. Oft berechnet aber der Kaufmann alle, auf eine erhaltene Waare gegangene Kosten von 100, um bei fernern Ankäufen den Preis der Waare im Voraus richtig schätzen zu können. So werden dann die Kosten proportionirt. Die Provision für den Commissionär, und die Courtage für den Makler, werden von 100 angegeben, und gehören also zu den proportionirten Kosten. Wenn die Kosten proc. bestimmt werden, so sind für die Rechnung vier Fälle möglich, nämlich, wenn die Kosten etwa 1 proc. sind

a) 100 : 99
b) 99 : 100
c) 100 : 101
d) 101 : 100

Der erste Fall a kann Statt finden, wenn ich jemand den Auftrag gebe, an einem, von mir entfernten Orte X für mich eine gewisse Summe Geld einzunehmen, und mir diese baar oder durch einen Wechsel zuzustellen. Wenn die Kosten für Provision und Courtage 1 proc. betragen, so erhalte ich statt 100 Thl. nur 99. Will ich mich von der Richtigkeit der übersandten Summe überzeugen, so berechne ich diese nach dem Verhältniß 99 : 100, da sich dann meine Forderung in X wieder ergeben muß. Der dritte Fall c kann auf folgende Weise Statt finden. Ich habe in Berlin zu bezahlen, und gebe dem Herrn N in Leipzig den Auftrag, diesen Betrag dorthin zu übermachen. N rechnet dabei für sich 1 proc. Provision, und ich werde ihm daher für jede 100 Thl, welche er für mich in Berlin bezahlt hat, 101 bezahlen müssen. Brächte er mir nun nachher etwa 1010 Thl. in Rechnung, so könnte ich, nach dem Verhältniß 101 : 100 = 1010 : x, erfahren, wie viel er in Berlin für mich bezahlt hat. Die Kosten werden entweder von dem Kapital selbst, zu welchem sie gehören, oder besonders bezahlt. In jenem Falle werden sie in 100, in diesem auf 100 berechnet. Wenn A z. B. einen Wechsel von 1500 Thl. mit 1 proc. für Courtage verkauft, so geht natürlicher Weise von jedem 100 für Spesen 1 ab. Wenn aber A für 1500 Thl. Waaren kauft und dabei noch 1 Thl. für Spesen erlegen muß, so kommt auf jede 100 Thl. noch 1 Thl. hinzu. In mehreren andern Fällen können diese vier Verhältnisse a, b, c, d, ihre Anwendung finden.

Bei Waarenberechnungen werden die Kosten beim Einkauf zu 100 gezählt, und beim Verkauf von 100 abgezogen. In Wechselberechnungen werden die Kosten beim Remittiren auf 100 und beim Trassiren unter oder in 100 gerechnet. Bei Commissionsrechnungen zählt man alle Kosten zu der Einkaufssumme und rechnet dann von dieser die Provision; beim Verkauf aber rechnet der Commissionär die Provision von der Verkaufssumme. Wenn der Commissionär beim Waarenverkauf auch noch für die richtige Bezahlung haftet, so erhält er dafür noch eine besondere Provision.

Digitized by Google

Man nennt ſolches del credere, du croire, auf Treu und Glauben verkaufen.

7) A in Elberfeld hat in London 720 Pfd. Sterl. zu bezahlen. Er kauft folgende Wechſel:

1125 holl. Gulden à 144
8000 Mark hamb. à $153^2/_5$
4800 Francs in Paris à $81^3/_4$
2000 Gulden in Wien à $102^1/_2$

Dieſe ſendet A nach London, wo ſie im folgenden Courſe angenommen werden:

der Wechſel auf Amſterdam à $37^1/_2$
» » » Hamburg à 36
» » » Paris à 25
» » » Wien à 10

a) Wie viel Thaler hat A für dieſe Wechſel bezahlt? b) Wie viel Pfd. Sterl. bleibt er noch ſchuldig?

Berechnung.

? : 1125 holl. Gld.
250 : 144 Thl.
Antw. 648 Thl.

? : 3000 Mark
300 : $153^2/_5$ Thl.
Antw. 1534 Thl.

? : 4800 Franc
300 : $81^3/_4$
Antw. 1308 Thl.

? : 2000 Gld. Wien
150 : $102^1/_2$ Thl.
Antw. $1366^2/_3$ Thl.

648
1308
1534
$1366^2/_3$
$4856^2/_3$ Thl. hat A für die 4 Wechſel bezahlt.

? : 1125 holl. Gld.
1 : $3^1/_3$ ßl. vls.
$37^1/_2$: 1 Pfd. Sterl.
Antw. 100 Pfd. Sterl.

? : 3000 Mark
1 : $2^2/_3$ ßl. vls.
36 : 1 Pfd. Sterl.
Antw. $222^2/_9$ Pfd. Sterl.

? : 4800 Francs
25 : 1 Pfd. Sterl.
Antw. 192 Pfd. Sterl.

? : 2000 Gld. in Wien
10 : 1 Pfd. Sterl.
Antw. 200 Pfd. Sterl.

A hat alſo in London bezahlt:

100 Pfd. Sterl.
$222^2/_9$ » »
192 » »
200 » »
$714^2/_9$ Pfd. Sterl., verſchuldet alſo noch
$720 - 714^2/_9 = 5^7/_9$ Pfd. Sterl.

8) M in Hamburg iſt nach Barcelona 1000 Dukaten di Cambio (Wechſeldukaten, eine ſpan. Rechnungsmünze) ſchuldig. N in London remittirt (übermacht oder bezahlt für N) dieſen Betrag zu 40 Pence für

1 Piaster (oder 1 Peso de Plata, eine fingirte span. Münze) zu 8 Reales de Plata, und trassirt auf M (zieht die Summe von M wieder ein); wie viel Thaler banco muß M an N für diese Tratte (den von N auf M gezogenen Wechsel) entrichten, wenn der Cours zwischen Hamburg und London 35 steht? 1 Duk. zu 375 Maravedis, 34 Marav. = 1 Real; 240 Pence = 1 Pfd. Sterl.; 8 ßl. vls. = 1 Thl. bco. = 48 Schill. lübisch.

Aufl.	?	:	1000 Dukat. di Cambio
	1	:	375 Maravedis
	34	:	1 Real
	8	:	40 Pence
	240	:	1 Pfd. Sterl.
	1	:	35 ßl. vls.
	8	:	1 Thl.

Antw. 1005 Thl. 14 Schill. lüb. zahlbar.

Anmerkung. In dem Course zwischen London und Hamburg ist 35 unbenannt. Der Lehrer verweise hier entweder auf den Londoner oder Hamburger Courszettel, wo er finden wird, daß die beständige Wechselvaluta zwischen diesen Städten 1 Pfd. Sterling ist, wogegen Hamburg 34, 35 oder 36 Schilling vlämisch bezahlt. Der Lehrer mag anfänglich die Münzsorte der beständigen sowol als auch der veränderlichen Valuta nennen, späterhin gebe er sie aber unbenannt an.

C. Pari-Rechnung.

§. 121. Das Wort „pari" heißt gleich, und in kaufmännischer Bedeutung versteht man darunter die Gleichheit des Werthes zweier Münzsorten von zweien Geldsummen. Bei der Vergleichung zweier Münzsorten unterscheidet man zweierlei Pari 1) das äußere, 2) das innere (reelle) Pari. Das äußere Pari wird entweder a) für eine einzelne Münzsorte oder b) für den Cours zwischen zwei Handelsplätzen gesucht. So sind jetzt 95 Sgr. pari mit dem holländ. Dukaten, und zwar ist dieß das äußere Pari zwischen preuß. Cour. und holländ. Dukaten. $143\frac{3}{10}$ Thl. preuß. Cour. ist jetzt (Ende Febr. 1826) das äußere Cours-Pari mit 250 holländ. Gulden Cour. Bei dem innern Pari sieht man auf den wirklichen Werth des edlen Metalls, welches die Münzsorten enthalten. Dieß betrifft nun wieder entweder a) die einzelnen Münzsorten oder b) das Cours-Pari. Nach dem innern Werthe sind 85 oder nach dem Courszettel $82\frac{1}{2}$ Sgr. pari mit dem holländ. Dukaten und 250 holländ. Gulden $143\frac{9}{10}$ Thl. preuß. Cour. Vom Pari der Münzsorten ist bereits gehandelt, es bleibt uns also noch übrig, das äußere und innere Courspari zwischen zwei Handelsplätzen zu suchen. Zuerst

a) Vom äußern Wechsel-Pari,

nach welchem der Cours zwischen zwei Orten, nach deren Coursen auf einen dritten Ort, gesucht wird. Ein Beispiel wird die Sache deutlich machen.

9) Der Cours zwischen Elberfeld und Amsterdam sei 145, zwischen Amsterdam und London 40, welches wäre demnach der Cours zwischen

image
not
available

13) Welches ist das reelle Pari zwischen Berlin und Amsterdam?

? : 250 holl., die beständige Valuta
1 : 200 Aß fein Silber oder
$347\frac{1}{2}$: 1 preuß. Thl.

143 Thl. $26\frac{1}{2}$ Sgr.

? : 250 Gld. holl.
$24\frac{3}{8}$: 14 Thl.

143 Thl. 18 Sgr. bein.

14) Welches ist das reelle Courspari zwischen Paris und Berlin a) nach dem Fünffrankenstück und dem preuß. Thaler, b) nach dem Napoleond'or oder Zwanzigfrankenstück und dem Friedrichsd'or zu $5\frac{2}{3}$ Thl?

Aufl. a) ? : 300 Fr.
5 : 1 Fünffr.
1 : 468 Aß Silber
$347\frac{1}{2}$: 1 preuß. Thl.

Antw. $80\frac{112}{139}$ Thl.

b) ? : 300 Fr.
20 : 1 Zwzgfrst.
1 : $119\frac{17}{20}$ Aß Gold
$125\frac{1}{3}$: 1 Friedrd'or
1 : $5\frac{2}{3}$ Thl.

Antw. $81\frac{87}{502}$ Thl.

oder nach dem Passirfuß:

? : 300
52 : 14

80 Thl. 23 Sgr.

? : 300 Fr.
20 : 1 Napd'or.
$40\frac{23}{30}$: 1 köln. Mark
1 : $38\frac{10}{13}$ Friedrd'or.
1 : $5\frac{2}{3}$ Thl.

Antw. 81 Thl. 6 Sgr. 6 Pfg.

15) Aus einer Mark fein Gold werden 31 engl. Guineen, desgleichen $38\frac{10}{13}$ Friedrichsd'or geprägt; welches ist demnach das innere Courspari zwischen London und Berlin, wenn Friedrichsd'or $12\frac{1}{2}$ Proc. Agio thun? 1 engl. Guinee = 21 Schill. Sterl. Die beständige Valuta zwischen beiden genannten Orten ist 1 Pfund Sterling = 20 Schilling Sterl.

Aufl. ? : 1 Pfd. Sterl. oder
1 : 20 Schill.
21 : 1 Guinee
31 : 1 Mark fein Gold
1 : $38\frac{10}{13}$ Frdd'or
1 : 5 Thl.
100 : $112\frac{1}{2}$ Thl. wegen Agio

Antw. 6 Thl. 21 Sgr. sehr nahe.

? : 1 Pfd. St. od. 1 Sovereign
32 : 1
1 : $38\frac{10}{13}$ Friedrd'or.
100 : $112\frac{1}{2}$

Antw. 6 Thl. 24 Sgr. 5 Pfg.

16) Auf eine köln. Mark fein Silber gehen 14 preuß. Thl., desgleichen $13\frac{1}{3}$ sächsische Thaler; welches ist demnach das reelle Courspari zwischen Leipzig und Berlin?

Aufl. ? : 100 Thl. Leipz. beständige Valuta
$13\frac{1}{3}$: 1 Mark fein Silber
1 : 14 Thl.

Antw. 105 Thl.

Anmerkung. Der Wechselkurs zwischen Berlin und Leipzig steht aber jetzt immer unter dem Parikurse, $2\frac{1}{2}$ proc. 3 bis $3\frac{1}{4}$ proc. Dieß rührt zum Theil daher, daß das preuß. Geld in Deutschland weit verbreitet ist, und deshalb häufig begehrt wird, theils aber auch daher, daß der Silberwerth der jetzigen

image
not
available

dem vortheilhaftesten und nachtheiligsten Course? c) Welches ist der Unterschied proc.?

Aufl. Da man hier nur im Allgemeinen wissen will, auf welchem Wege B am vortheilhaftesten bezahlen kann, so ist es unnöthig, die ganze Summe von 300 Pfd. Sterl. jedesmal zu berechnen. Man nimmt daher 1 Pfd. Sterl. an, von welchem der Weg a drittura schon gegeben ist. Also:

a) ? : 1 Pfd. Sterl.
1 : $25\frac{3}{5}$ Fr.
300 : 82 Thl.

Antw. 7 Thl. sehr nahe.

? : 1 Pfd. Sterl.
1 : 35 ßl. vls. hamb.
$2\frac{2}{3}$: 1 Mark
300 : 151 Thl.

Antw. 6 Thl. $18\frac{3}{16}$ Sgr.

? : 1 Pfd. Sterl.
1 : 11 Gld.
250 : 145 Thl.

Antw. 6 Thl. $11\frac{2}{3}$ Sgr.

Ueber Amsterdam kann B am vortheilhaftesten bezahlen, da ihm auf diesem Wege 1 Pfd. Sterl. nur 6 Thl. $11\frac{2}{3}$ Sgr. zu stehen kommt.

Pariser Wechsel wären für B am nachtheiligsten.

b) a drittura $6\frac{4}{5} \times 300 = 2040$ Thl.
Ueber Paris $7 \times 300 = 2100$ „
„ Amsterdam $6\frac{19}{50} \times 300 = 1914$ „
„ Hamburg $6\frac{61}{100} \times 300 = 1933$ „
$2100 - 1914 = 186$ Thl. Unterschied.

c) $1914 : 100 = 186 : x$

Gegen 10 Proc.

18) 1824 standen die Napoleond'or in Elberfeld $5\frac{3}{4}$ Thl. Der Cours zwischen Paris und Amsterdam stand 56 und von Amsterdam auf Elberfeld 144.

Der Cours zwischen Paris und London war $24\frac{1}{2}$, von Elberfeld auf London $6\frac{4}{5}$.

Der Cours zwischen Paris und Hamburg war $25\frac{5}{6}$, von Elberfeld auf Hamburg 150.

Als nun die Napoleond'or so hoch im Preise standen, wollte jemand von Paris 1000 Stück dieser Münzsorte kommen lassen. a) Mit welchen Papieren (Wechselbriefen) waren diese in Paris am vortheilhaftesten einzukaufen? b) Wie viel gewann er mit dieser Summe?

Aufl. Es kommt hier darauf an, Wechsel in Elberfeld wohlfeil einzukaufen und diese in Paris theuer zu verkaufen. Die Berechnung ist folgende:

Betrag in Elberfeld: $1000 \cdot 5\frac{3}{4} = 5750$ Thl.

Ueber Amsterdam.

? : 1000 Napoleond'or
1 : 20 Francs
3 : 56 Den. vls. in Amsterdam
40 : 1 Florin
250 : 144 Thl. in Elberfeld.

Antw. 5376 Thl.

Ueber London.

? : 1000 Napoleond'or
1 : 20 Francs
$24\frac{1}{2}$: 1 Pfd. Sterl.
1 : $6\frac{4}{5}$ Thl.

Antw. 5551 Thl. stark.

image
not
available

4. Ueber Hamburg und London:

?	:	300 Francs
3	:	32 Pfg. Sterl.
12	:	1 Schill. Sterl.
20	:	1 Liv. Sterl. oder Pfd. Sterl.
1	:	32½ Schill. vlám. bco.
8	:	1 Thl. bco. in Hamburg
100	:	144¾ Thl. Gold in Leipzig.

Antw. 78 Thl. 9 Ggr. 9 Pfg.

A drittura wäre also am besten zu remittiren; dagegen über Hamburg und London am besten zu trassiren.

20) Hamburg kauft 2000 Stück Louisd'or à 11 Mark 5 Schill. lüb. bco. ein; diese sendet es nach Leipzig, wo sie al Corso (nach dem couranten Werth) mit 9⅞ proc. Agio verwechselt werden. Leipzig remittirt den Betrag zurück im Cours à 143½. Wenn nun wegen Fracht und übriger Spesen in Hamburg 1 proc. und in Leipzig auch 1 proc. zu rechnen ist; so ist die Frage, wie viel Hamburg an seinen Louisd'oren gewonnen oder verloren habe?

Aufl. Es fragt sich hier also: wie viel Stück Louisd'or erhält Hamburg für seine ausgegebenen 2000 Stück Louisd'or zurück?

?	:	2000 Louisd'or
1	:	5 Thl. (gesetzl. Werth)
100	:	109⅞ Thl. cour. Münze
143½	:	300 Mark in Hamburg
11⅝	:	1 Louisd'or
101	:	100 Hamb. Spesen
100	:	99 Leipz. Spesen.

Antw. $2004\frac{100144}{341339}$ oder nahe 2004³/₁₀ Stück L.

Hamburg hat also einen Gewinn von 2004³/₁₀ — 2000 = 4³/₁₀ Louisd'or.

Wäre die Frage: wie viel Louisd'or haben empfangene 2000 Stück mit allen Spesen gekostet, so müßte folgender Satz gebildet werden:

?	:	2000 Louisd'or
1	:	11⅝ Mark
300	:	143½ Thl. Münze
109⅞	:	100 Thl. Louisd'or
5	:	1 Louisd'or
100	:	101 Hamb. Spesen
99	:	100 Leipz. Spesen.

Antw. nah 1995⁷/₁₀ Stück L.

Der Gewinn wäre also 2000 — 1995⁷/₁₀ = 4³/₁₀ Louisd'or, mit dem vorigen sehr nahe übereinstimmend, nur mit dem Unterschiede, daß diese 4³/₁₀ Louisd'or hier mit 1995⁷/₁₀, und nicht mit 2000 Louisd'or gewonnen worden sind.

Nach dem letzteren Ansatze empfange ich in Hamburg 1 Louisd'or und bezahle dafür 11 M. 5 ßl. In Betreff der Spesen ist hier

image
not
available

von neuem zu begründen und zu üben. Damit er nicht in diesen unangenehmen Fall komme, scheint es sehr gerathen zu sein, jeden vorgetragenen und gehörig begründeten Lehrsatz an Beispielen so fleißig zu üben, bis er dem Schüler unverlierbar eingeprägt ist. Ein mechanisches Abrichten kann dieß nicht genannt werden, da der Verstand des Schüler hiebei in Thätigkeit gesetzt wird. Die mechanischen Rechenoperationen müssen dem Schüler so geläufig sein, daß sie ihm bei seinen fernern mathematischen Studien nicht hindernd und hemmend in den Weg treten. Wir müssen auch hier als eine ächt pädagogische Unterrichtsweise empfehlen: „durch Rechnen rechnen zu lehren." „Durch Schmieden wird man ein Schmied," sagten die Römer; durch Uebung gelangt man zur Meisterschaft. Wenn wir daher jetzt immer größere Ansprüche machen, und, wie wir früherhin sagten, beim vorgerückten Alter des Schülers uns beim Vortrage immer mehr der wissenschaftlichen Methode nähern, so darf dieß nicht so verstanden werden, als bedürfe der Schüler jetzt nur noch einer deutlichen, theoretischen Kenntniß der arithmetischen Lehrsätze, die gemeine Praxis könne ihm erlassen werden. Die Praxis muß sich jetzt nothwendig auf die Theorie gründen. Den Ausspruch jenes französischen Mathematikers: „allez en avant et la foi vous viendra" finden wir auf dieser Stufe verwerflich, so sehr wir ihn auch bei mathematischen Gegenständen für Knaben von 6 bis 10 Jahren billigen. So unnütz und nachtheilig in diesem Alter ein haarscharfes Demonstriren ist, so ersprießlich für die Geistesbildung beweiset sich für den 14—17jährigen Jüngling die demonstrative Lehrmethode. Der Unterricht in der Arithmetik soll aber beides, Selbstdenken und Selbstthätigkeit, Einsicht und Fertigkeit, befördern.

Was nun die Aufeinanderfolge der Rechenkapitel betrifft, so möchte es vielleicht manchem Lehrer zweckmäßiger scheinen, wenn die Lehre von den Decimalbrüchen schon gleich beim Numeriren oder bei den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen oder doch gleich bei den 4 Species in Brüchen ihre Stelle erhalten hätte. Diese Meinung hat allerdings Manches für sich; aber weit Erheblicheres gegen sich. In Betreff des Wissens und Könnens muß die Elementarschule es sich zum Grundsatz machen: Zuerst das Nothwendige, dann das Nützliche. Zu jenem kann aber das Rechnen mit Decimalbrüchen nicht gezählt werden, da es im bürgerlichen Leben nicht häufig in Anwendung kommt und wirklich die Eintheilung in Halbe, Viertel, Achtel u. s. w. natürlicher und auch weit allgemeiner im Gebrauch ist als die Decimal-Eintheilung. Bei genauerer Ansicht wird es auch klar, daß in der Decimalrechnung Manches vorkommt, was für die untern Klassen der Elementarschulen zu schwierig ist. Die Darstellungsweise der Decimalbrüche und das Lesen und Schreiben derselben kann allerdings schon früher vorgenommen werden. Das Rechnen mit Decimalbrüchen gewährt übrigens sowol in dem bürgerlichen Verkehr, als auch in den Wissenschaften so viel Bequemlichkeit und so große Vortheile, daß auch die Schüler in den obern Klassen der Elementarschulen sich damit bekannt machen müssen. Unser erstes Uebungsbuch enthält schon in den Vorübungen zu den Brüchen Aufgaben, in welchen gefordert wird, den Werth eines Bruchs in verschiedenen Benennungen, also auch in Zehnteln, Hunderteln und andern Decimal-Nennern darzustellen. Der Abschnitt

über die Decimalbrüche ist aus dem dritten Uebungsbuche in die neuern Auflagen des ersten Uebungsbuches aufgenommen worden. —

§. 124. Eine Ziffer bezeichnet auf zweifache Weise eine bestimmte Zahl, nämlich 1) durch ihre Figur und 2) durch die Stelle, welche sie in einer Ziffernreihe einnimmt. Die Figur ist beständig, die Stelle aber veränderlich. Nach unserm Zahlensystem nimmt der Werth einer Ziffer, so oft sie eine Stelle nach der linken Seite hin fortschreitet, um das Zehnfache zu, aber nach der rechten Seite hin bezeichnet sie mit jeder Stelle, die sie rechts voran rückt, nur den zehnten Theil ihres nächst vorhergehenden Werthes. Die erste Stelle der ganzen Zahlen nehmen die Einer ein; dagegen stehen auf der ersten Decimalstelle die Zehntel. Die Einerstelle wird von der Stelle der Zehntel durch ein Komma, Decimalkomma, getrennt, so daß auf der linken Seite dieses Komma ganze Zahlen und rechts gebrochene Zahlen oder Brüche stehen. Wenn sich keine ganze Zahlen vorfinden, so wird bloß die Einerstelle durch eine Null besetzt, z. B. 7 bezeichnet auf der ersten Stelle der ganzen Zahlen 7 Einer, auf der zweiten (70) 7 Zehner; auf der ersten Decimalstelle (0,7) 7 Zehntel, auf der zweiten (0,07) 7 Hundertel u. s. f. Die Brüche auf der rechten Seite des Komma sind von der Art, daß sie immer entweder 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. zum Nenner haben. Brüche, deren Nenner 10 oder 10 mal 10, überhaupt ein Produkt aus 10 sind, werden Decimalbrüche genannt*). Der Nenner der Decimalbrüche wird nicht besonders angemerkt, sondern durch die Anzahl der Ziffern des Zählers erkannt. So wie bei ganzen Zahlen der Stellenwerth einer Ziffer nicht besonders angemerkt, sondern durch die Stelle erkannt wird, welche die Ziffer einnimmt, eben so verhält es sich bei Decimalbrüchen. Folgende Darstellung mit der Ziffer 7 in ihren verschiedenen Stellen wird das Gesagte anschaulich machen.

Siebente Stelle	7000000	=	Sieben	Millionen
Sechste »	700000	=	»	Hunderttausende
Fünfte »	70000	=	»	Zehntausende
Vierte »	7000	=	»	Tausende
Dritte »	700	=	»	Hunderte
Zweite »	70	=	»	Zehner
Erste »	7	=	»	Einer
Erste Decimalstelle	0,7	=	Sieben	Zehntel = $^7/_{10}$
Zweite »	0,07	=	»	Hundertel = $^7/_{100}$
Dritte »	0,007	=	»	Tausendtel = $^7/_{1000}$
Vierte »	0,0007	=	»	Zehntausendtel = $^7/_{10000}$
Fünfte »	0,00007	=	»	Hunderttausendt. = $^7/_{100000}$
Sechste »	0,000007	=	»	Milliontel = $^7/_{1000000}$

Anmerkung. Jede ganze Zahl kann man auch in Form eines Decimalbruchs darstellen: z. B. 75 = 75,0; 1831 = 1831,0.

*) Wenn eine Vorausnahme erlaubt wäre, so könnte man sagen: Decimalbrüche sind solche, deren Nenner Potenzen von 10 sind, also 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 u. s. w. Ist der Schüler mit den Potenzen bekannt, so kann ihm diese Erklärung gegeben werden.

Digitized by Google

§. 125. Aus dieser Darstellung ergibt sich, daß Decimalbrüche, da sie in Hinsicht ihrer Bezeichnung mit unserm Zahlensystem denselben Gesetzen unterworfen sind, auch wie ganze Zahlen geschrieben werden können. In der ersten Decimalstelle stehen Zehntel, in der zweiten Hundertel, in der dritten Tausendtel, in der vierten Zehntausendtel, in der fünften Hunderttausendtel, in der sechsten Milliontel, in der siebenten Zehnmilliontel u. s. w. Die Zahl 0,34567 enthält also: 3 Zehntel, 4 Hundertel, 5 Tausendtel, 6 Zehntausendtel, 7 Hunderttausendtel, und wird gelesen: vier und dreißig tausend fünf hundert sieben und sechszig Hunderttausendtel. 0,00809 enthält: 0 Zehntel, 0 Hundertel, 8 Tausendtel, 0 Zehntausendtel und 9 Hunderttausendtel, und wird gelesen: 809 Hunderttausendtel; $0{,}8975 = {}^{8}/_{10} + {}^{9}/_{100} + {}^{7}/_{1000} + {}^{5}/_{10000}$ oder $= 0{,}8 + 0{,}09 + 0{,}007 \times 0{,}0005 = {}^{8975}/_{10000}$.

Folgt nach dem Decimalkomma rechts nur eine Ziffer, so heißt der Decimalbruch einstellig; folgen nach demselben 2 Ziffern, so heißt er zweistellig; 3 Ziffern dreistellig oder dreiziffrig u. s. w.

Aufgaben.

1) Wie werden folgende Decimalbrüche gelesen: 0,9 (neun Zehntel); 0,17 (siebenzehn Hundertel); 0,057 (sieben und fünfzig Tausendtel); 0,0001 (1 Zehntausendtel); 7,00409 (7 Ganze und 409 Hunderttausendtel); 957,0304 (957 Ganze und 304 Zehntausendtel).

§. 126. Um einen Decimalbruch in seiner gehörigen Form mit Ziffern zu schreiben, muß man sich Folgendes merken. Aus den beiden vorhergehenden Paragraphen ist es klar, daß der Nenner eines Decimalbruchs immer 1 Ziffer mehr enthält als der Zähler. Enthält daher der Zähler bloß Ziffern von absolutem Werth (1, 2, 3, 4 u. s. w.), so darf man nur den Zähler als ganze Zahl hinsetzen, vor die erste Ziffer links das Decimalkomma und vor dieses eine Null an die Einerstelle schreiben; kommen aber im Zähler mehrere Nullen in den ersten Decimalstellen vor, so ist es, wenigstens anfänglich, rathsam, den Decimalbruch zuerst in der gewöhnlichen Bruchform darzustellen. Man beobachte dabei die Klugheit, zuerst den Nenner hinzusetzen und dann den Zähler darüber mit so viel Ziffern, als der Nenner enthält, weniger 1. — Sieben und zwanzig Hundertel wird geschrieben 0,27. Der Zähler enthält hier nur Ziffern von absolutem Werth; ich schreibe daher 27 als ganze Zahl, daher das Komma und vor dieses 0, also 0,27. Gesetzt aber, ich sollte 27 Milliontel schreiben, so müßte ich auf folgende Weise verfahren: Zuerst schreibe ich den Nenner $\frac{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}{1000000}$, dann den Zähler mit so viel Nullen links, daß die Anzahl der Ziffern im Zähler 1 weniger beträgt als die Zifferanzahl des Nenners. Der Nenner hat hier 7 Ziffern, also wird der Zähler deren 6 bekommen. Der Zähler heißt daher 000027; der Decimalbruch, in der gewöhnlichen Bruchform dargestellt, ist $\frac{000027}{1000000}$, in seiner gehörigen Form aber 0,000027. Nach einiger Uebung wird diese Weitläufigkeit wegfallen. Noch zweckmäßiger ist es, den Schüler vorher fleißig darin zu üben, den Werth jeder Decimalstelle anzugeben. Nämlich: in der ersten

Stelle stehen Zehntel, in der zweiten Hundertel, in der dritten Tausendtel u. s. w. Soll nun der Schüler etwa sieben Tausendtel schreiben, so weiß er, daß die 7 in die dritte Decimalstelle zu stehen kommt, also 0,007. Bei größeren zusammengesetzten Zahlen verfährt man auf die zuerst angegebene Weise sicherer.

2) Wie werden folgende Brüche in Form eines Decimalbruchs dargestellt? $^{29}/_{100}$; $^{29}/_{1000}$; $8^{29}/_{10000}$ (= 0,29; 0,029; 8,0029).

3) Wie werden folgende Decimalbrüche mit Ziffern geschrieben? a) Sieben Zehntel; b) Fünf Ganze und neun Hundertel; c) Neun und dreißig Ganze und drei Hundert sieben und sechszig Tausendtel; d) Drei Zehntausendtel; e) 879 Ganze und 607 Zehntausendtel; f) 9 Ganze und 409 Zehnmilliontel? (a) 0,7; b) 5,09; c) 39,367; d) 0,0003; e) 879,0607; f) 9,0000409).

a) $3 = {}^{3}/_{1}$
$0{,}3 = {}^{3}/_{10}$
$0{,}03 = {}^{3}/_{100}$
$0{,}003 = {}^{3}/_{1000}$
$0{,}0003 = {}^{3}/_{10000}$

b) $0{,}3 = {}^{3}/_{10}$
$0{,}30 = {}^{30}/_{100} = {}^{3}/_{10}$
$0{,}300 = {}^{300}/_{1000} = {}^{3}/_{10}$
$0{,}3000 = {}^{3000}/_{10000} = {}^{3}/_{10}$
$0{,}30000 = {}^{30000}/_{100000} = {}^{3}/_{10}$

c) $56789 = {}^{56789}/_{1}$
$5678{,}9 = 5678{}^{9}/_{10}$ oder ${}^{56789}/_{10}$
$567{,}89 = 567{}^{89}/_{100}$ = ${}^{56789}/_{100}$
$56{,}789 = 56{}^{789}/_{1000}$ = ${}^{56789}/_{1000}$
$5{,}6789 = 5{}^{6789}/_{10000}$ = ${}^{56789}/_{10000}$
$0{,}56789 = {}^{56789}/_{100000}$
$0{,}056789 = {}^{56789}/_{1000000}$
$0{,}0056789 = {}^{56789}/_{10000000}$

d) $0{,}56789 = {}^{56789}/_{100000}$
$5{,}6789 = {}^{56789}/_{100000} \cdot 10 = 5{}^{6789}/_{10000}$
$56{,}789 = 5{}^{6789}/_{10000} \cdot 10 = 56{}^{789}/_{1000}$
$567{,}89 = 56{}^{789}/_{1000} \cdot 10 = 567{}^{89}/_{100}$
$5678{,}9 = 567{}^{89}/_{100} \cdot 10 = 5678{}^{9}/_{10}$
$56789 = 5678{}^{9}/_{10} \cdot 10 = 56789.$

Bei aufmerksamer Ansicht von a, b, c, d ergibt sich Folgendes:

Für a: Mit jeder Null, welche man dem Zähler des Decimalbruchs vorsetzt, rücken alle Ziffern desselben in eine niedrigere Zahlenordnung, oder, was dasselbe ist, wird jedesmal der Decimalbruch durch 10 dividirt, und gilt dann ein Zehntel seines zunächst vorhergehenden Werthes.

Für b: Der Werth des Decimalbruchs bleibt unverändert, wenn der letzten Decimalziffer rechts eine oder mehrere Nullen zugesetzt werden. Es wird dann Zähler und Nenner mit gleicher Zahl multiplicirt, mithin behält der Bruch denselben Werth, welchen er hatte.

Für c: Mit jeder Stelle, welche das Decimalkomma von der rechten Hand zur linken vorrückt, erhält die Zahl einen zehnfach geringeren Werth. Es ist eben so, als würde sie jedesmal mit 10 dividirt.

Für d: Mit jeder Stelle, um welche das Decimalkomma von

Digitized by Google

der rechten zur linken Hand hin fortschreitet, erhält die Zahl den zehnfach größern Werth. Es ist eben so, als würde die Zahl jedesmal mit 10 multiplicirt.

Es folgt daraus: Sollen Decimalbrüche oder auch jede Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt werden, so setzt man das Decimalkomma ein, zwei oder drei Stellen weiter links; sollen sie aber mit diesen Zahlen multiplicirt werden, so rückt man das Komma ein, zwei oder drei Stellen rechts.

§. 127. Setzt man statt 0,72 nur 0,70 oder 0,7, so hat man $^{2}/_{100}$ zu wenig; nimmt man aber 0,80 oder 0,8 statt 0,72, so hat man $^{8}/_{100}$ zu viel. In letztem Falle würde man weiter von der Wahrheit entfernt bleiben, als im ersten. Setzt man statt 0,968 nur 0,960 oder 0,96, so fehlen $^{8}/_{1000}$, nimmt man aber 0,970 oder 0,97, so fehlen $^{2}/_{1000}$. Hier würde man in letztem Falle weniger von der Wahrheit abweichen als im ersten. Wer statt 0,65 nur 0,60 oder 0,6 nehmen wollte, der würde um $^{5}/_{100}$ fehlen; würde er 0,70 oder 0,7 statt 0,65 nehmen, so würde er sich ebenfalls um $^{5}/_{100}$ von der Wahrheit entfernen.

Es ergibt sich hieraus Folgendes:

1) Ist die Endziffer eines Decimalbruchs kleiner als 5, so wird durch die bloße Auslassung derselben weniger gefehlt, als wenn man außer dieser Wegwerfung noch die ihr zunächststehende Ziffer um eine Einheit erhöht.

2) Ist die Endziffer eines Decimalbruchs größer als 5, so wird weniger gefehlt, wenn man die nächststehende Ziffer um eine Einheit vermehrt und dann die Endziffer wegläßt, als wenn sie ohne diese Vermehrung weggeworfen wird.

3) Schließt der Decimalbruch mit der Endziffer 5, so ist es einerlei, ob sie mit oder ohne jene angeführte Vermehrung weggeworfen wird. Im ersten Falle wird der Decimalbruch um eben so viel vermehrt, als im zweiten Falle vermindert. 5 niedere Einheiten gelten eine halbe zunächst vorhergehende höhere Einheit. Man fehlt also gleichviel, wenn man statt eines Halben ein Ganzes nimmt oder ein Halbes wegwirft. Wenn aber ein Decimalbruch nicht mit der Endziffer 5 schließt, also noch mehrere Ziffern nach 5 folgen, so muß bei der Abkürzung die vorletzte Ziffer um 1 vermehrt werden. Es ist einleuchtend, daß in diesem Falle weniger gefehlt wird, als wenn man die Endziffer 5 ganz wegwirft.

Dieß Wegwerfen der Endziffern und Erhöhen der zunächst vorhergehenden Ziffern nennt man einen Decimalbruch abkürzen. Der weggeworfene Theil wird dann als so unbedeutend angesehen, daß er für nichts geachtet wird. 0,701 Thl. wird für 0,700 oder 0,7 gerechnet. Der Fehler, welchen man dadurch begeht, beträgt $^{1}/_{1000}$ Thl. $= {}^{360}/_{1000} = {}^{9}/_{25}$ Pfenning, welche gar nicht in Betracht kommen. Statt 0,749 nimmt man 0,75, wirft also $^{9}/_{1000}$ weg, und vermehrt dagegen die Zahl um $^{10}/_{1000}$. Der Fehler beträgt hier $^{1}/_{1000}$. Statt 0,875 nimmt man entweder 0,870 = 0,87 oder 0,88. Im ersten Falle wird $^{5}/_{1000}$ zu wenig und im zweiten Falle $^{5}/_{1000}$ zu

image
not
available

tend, daß man der Wahrheit näher kommt, wenn man $^4/_{12}$, d. i. $^4/_{12}/_{100}$ zusetzt, also $^{12}/_{12} = 1$ statt $^8/_{12}$ nimmt, als wenn man den Rest von $^8/_{12}$ wegwirft. Daher setzt man $^{11}/_{12} = 0{,}92$. Man kommt aber dem wahren Werthe noch näher, wenn $^{11}/_{12}$ in einen dreistelligen Decimalbruch verwandelt werden. $^{11}/_{12} = {}^{11{,}000}/_{12} = 0{,}916$. Hier sind abermals $^8/_{12}$ d. h. $^8/_{12}/_{1000} = {}^8/_{12000}$ weggeworfen worden, folglich weniger als vorher. Auch hier komme ich der Wahrheit wieder näher, wenn ich $^4/_{12}$ d. i. $^4/_{12}/_{1000}$ zusetze und 0,917 statt 0,916 nehme, u. s. f.

Anmerkung. Ist der Bruch ein unächter, d. h. ist der Zähler größer als der Nenner, so dividirt man diesen in jenen, hängt dem Zähler, je nachdem es auf mehr oder minder große Genauigkeit ankommt, auch mehr oder weniger Nullen an, und setzt nach dieser Bestimmung das Dividiren fort. Dabei muß die Vorsicht beobachtet werden, daß man mit der ersten, dem Zähler zugesetzten Null auch neben den schon erhaltenen Quotienten ein Decimalkomma setzt, um anzuzeigen, daß die folgenden Ziffern einen Decimalbruch bezeichnen.

Z. B. der Bruch sei $^{19}/_7$, so haben wir

```
7 : 19 = 2,714
    14
    ---
     50
     49
     ---
      10
       7
      ---
       30
       28
       ---
        2
u. s. w.
```

Man hätte auch gleich dem Zähler 3 Nullen anhängen und dividiren können:

```
7 : 19,000 = 2,714
    14
    ---
     50
     49
     ---
      10
       7
      ---
       30
       28
       ---
        2
```

Statt $^{19}/_7$ haben wir nun 2,714. Bei jeder Division, welche einen Rest läßt, kann so verfahren werden, z. B.

```
237 : 59898 = 252,734
      474
      ----
      1249
      1185
      ----
       648
       474
       ----
       1740
       1659
       ----
        810
        711
        ---
        990
        948
```

Ist aber der Bruch ein ächter, d. h. ist der Zähler kleiner als der Nenner, so setzt man als Quotient zuerst eine 0, zum Zeichen, daß keine Ganze da sind, hängt dann dem Zähler als Dividenden eine beliebige Anzahl von Nullen an und dividirt fort, z. B. $^7/_{12}$

```
12 : 7 = 0,583
     0
     ---
     70
     60
     ---
     100
      96
     ---
      40
      36
     ---
       4 u. s. w.
```

6) Verwandle auf diese Weise folgende Brüche: $^{13}/_{11}$, $^{29}/_{13}$, $^{47}/_{21}$,

vandle am ...

$^{7498}/_{673}$, $^{6}/_{7}$, $^{12}/_{13}$, $^{5}/_{19}$ in vierſtellige Decimalbrüche; ebenſo ſtelle bei folgenden Diviſionsaufgaben den Reſt in einem dreiſtelligen Decimalbruche dar. 7 : 24; 15 : 53; 797 : 481975.

7) Ein holländiſches Pfund wiegt 10280 holl. Aß, ein berliner Pfund 9750 holl. Aß; berechne demnach, wie viel berliner Pfund auf ein holl. Pfund gehen, und drücke den Bruchreſt in einem Decimalbruch mit 1 oder 2 oder 3 Stellen aus.

Aufl. 9750 holl. Pfund = 10280; wir müſſen mit jener Zahl in dieſe dividiren.

9750 : 10280 = 1,054
9750
53000
48750
42500
39000 u. ſ. w.

Wenn es auf keine große Genauigkeit ankommt, ſo kann man hier ſagen:

1 holl. Pfund = 1 berl. Pfund.
Genauer aber 1 " " = 1,05 " "
Noch genauer 1 " " = 1,054 " "

Multiplicirt man dieſen letzten Ausdruck mit 1000, ſo haben wir: 1000 holl. Pfund = 1054 berl. Pfund.

8) Eine engliſche Meile enthält 5135 Fuß, eine geographiſche 23640 Fuß; wie viel engliſche Meilen gehen auf eine geographiſche Meile?

Aufl. 5135 geogr. M. = 23640 engl. M.
5135 : 23640 = 4,6037
20540
31000
30810
19000
15405
35950
35945 u. ſ. w.

Wenn es auf keine große Genauigkeit ankommt, ſo haben wir:

1 geogr. M. = 4 oder $4^1/_2$ engl. M.
Genauer 1 " " = 4,6 " " "
oder 10 " " = 46 " " "
Noch genauer 1 " " = 4,603 " " "
oder 1000 " " = 4603 " " "
Noch genauer 1 " " = 4,6037 " " "
oder 10000 " " = 46037 " " "

Anmerkung. Der Lehrer gebe mehr Aufgaben dieſer Art.

§. 130.

$^1/_2 = 0{,}5$;
$^1/_4 = 0{,}25$; $^3/_4 = 0{,}75$;

$^1/_5 = 0{,}2$; $^2/_5 = 0{,}4$; $^3/_5 = 0{,}6$; $^4/_5 = 0{,}8$
$^1/_8 = 0{,}125$; $^3/_8 = 0{,}375$; $^5/_8 = 0{,}625$; $^7/_8 = 0{,}875$
$^1/_{20} = 0{,}05$; $^3/_{20} = 0{,}15$; $^7/_{20} = 0{,}35$; $^9/_{20} = 0{,}45$
u. s. w.
$^1/_3 = 0{,}3\ldots$; $^2/_3 = 0{,}66\ldots$. immer mit Resten
$^1/_3 = 0{,}333\ldots$; $^2/_3 = 0{,}66666$. " " "
$^1/_9 = 0{,}11\ldots$; $^2/_9 = 0{,}22$; $^7/_9 = 0{,}77\ldots$ mit Resten
$^1/_{15} = 0{,}066\ldots$; $^7/_{15} = 0{,}4666\ldots\ldots$ " "

Es ergibt sich daraus Folgendes:

Jeder gewöhnliche Bruch, welcher sich nur in die Faktoren 2 und 5 zerlegen läßt, kann vollkommen durch einen Decimalbruch dargestellt werden. $^{128}/_{250} = \frac{2.2.2.2.2.2.2}{5.5.5.2} = 0{,}512$; $^{96}/_{225} = \frac{2.2.2.2.2.3.}{5.5.3.3.}$

Alle gewöhnlichen Brüche, deren Nenner sich noch auf andere Faktoren als 2 und 5 zurückführen lassen, können nicht genau in Decimalbrüchen dargestellt werden. Alle Decimalbrüche haben zu ihrem Nenner entweder 10 oder eine Potenz von 10. Die Nenner aller Decimalbrüche können mit den Zahlen 2 und 5, aber auch mit diesen genau gemessen werden. Ist nun der Nenner eines gewöhnlichen Bruchs eine Zahl, welche sich vollständig in die Faktoren 2 und 5 zerlegen läßt, so muß dieser Bruch auch vollkommen durch einen Decimalbruch dargestellt werden können, welches nicht möglich ist, wenn jener Nenner außer 2 und 5 noch andere Faktoren enthält.

Es ist eine merkenswerthe Eigenthümlichkeit dieser letzten Brüche, daß, wenn man sie in Decimalbrüche verwandeln will, bei fortgesetzter Division regelmäßig dieselben Ziffern im Zähler wieder zum Vorschein kommen. Z. B. $^1/_3 = 0{,}333\ldots$, $^2/_3 = 0{,}666\ldots$, $^1/_{11} = 0{,}0909\ldots\ldots$, $^2/_{11} = 0{,}181818\ldots$ Die Wiederkehr derselben Ziffern im Zähler des Decimalbruchs nennt man eine Periode und den Decimalbruch einen periodischen Decimalbruch. Fängt die Periode gleich mit der ersten Decimalstelle an, so heißt der Bruch rein periodisch; fängt aber die Periode erst in einer der folgenden Stellen an, so wird der Decimalbruch unrein periodisch genannt. Wenn bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch der erste Rest, welcher sich bei der Division ergibt, verbunden mit einer hinzugefügten Null des Dividend, gleich ist der ersten Zahl im Dividend, in welche man dividirte, so müssen nothwendig alle noch folgenden Reste, so wie auch alle Ziffern des Quotients einander gleich sein, folglich diese letztern eine reine Periode bilden. Z. B. $^1/_3 = {}^{1,0000}/_3 = 0{,}3333$. Der erste Rest bei der Division ist hier 1, welche mit der hinzugefügten 0 wieder 10 bildet. Alle folgenden Partial-Divisionen geben nun denselben Rest, also auch wieder denselben Quotient 3. Eben so ist es mit $^7/_9$. Alle gewöhnlichen Brüche, deren Nenner die Faktoren 2 oder 5 nicht enthalten, lassen sich in rein periodische Decimalbrüche verwandeln Beispiel $^7/_9$. Der Nenner 9 enthält keinen der beiden Faktoren 2 oder 5; $^7/_9 = 8{,}777\ldots$, $^9/_{11} = 0{,}8181\ldots$

Jeder gewöhnliche Bruch, dessen Nenner außer den Faktoren 2 und

image
not
available

$^4/_9$ (0,444 . . . ist ein rein periodischer Decimalbruch, die Anzahl der periodischen Ziffern ist 1.)
$^7/_9$ (= 0,777 . . .); $^1/_{11}$ (= 0,09090 . . .); $^2/_{11}$ (= 0,1818 . . .);
$^3/_{11}$ (= 0,2727 . . .); $^4/_{11}$ (= 0,3636 . . .); $^5/_{11}$ (= 0,4545 . . .);
$^2/_7$ (= 0,285914285 . . . .); $^3/_7$ (0,4285714285 . . . .);
$^9/_{13}$ (= 0,692307692 . . . .).

Anmerkung. Gewöhnliche Brüche, deren Nenner 2 oder 5 oder nur aus den Produkten dieser Zahlen bestehen, geben, wie vorhin bemerkt, keine periodische Decimalbrüche. Von 1 bis 10 bringen die Nenner 2, 4, 5, 8, 10 keine Perioden hervor, wohl aber die Nenner 3, 6, 7, 9. Die ächten gewöhnlichen Brüche mit diesen Nennern geben folgende periodische Decimalbrüche:

$^1/_3 = 0{,}333 \ldots$
$^2/_3 = 0{,}666 \ldots$
$^1/_6 = 0{,}166 \ldots$
$^5/_6 = 0{,}833 \ldots$
$^1/_7 = 0{,}14285714 \ldots$
$^2/_7 = 0{,}285714285 \ldots$
$^3/_7 = 0{,}4285714 \ldots$
$^4/_7 = 0{,}5714285 \ldots$
$^5/_7 = 0{,}7142857 \ldots$
$^6/_7 = 0{,}8571428 \ldots$
$^1/_9 = 0{,}1111 \ldots$
$^2/_9 = 0{,}2222 \ldots$
$^4/_9 = 0{,}4444 \ldots$
$^5/_9 = 0{,}5555 \ldots$
$^7/_9 = 0{,}7777 \ldots$
$^8/_9 = 0{,}8888 \ldots$

§. 131. Decimalbrüche auf gewöhnliche Brüche zurückzuführen.

1) Decimalbrüche mit vollständigem Werth.

Man bringt sie durch das größte gemeinschaftliche Maß auf die kleinste Benennung. Beispiel. $0{,}75 = {}^{75}/_{100} = {}^3/_4$; $0{,}375 = {}^{375}/_{1000}$, durch 125 aufgehoben $= {}^3/_8$.

2) Decimalbrüche mit unvollständigem Werthe und zwar

a) rein periodische Decimalbrüche. Um den Grund des Verfahrens einzusehen, müssen wir vorher die gewöhnlichen Brüche $^1/_9$, $^1/_{99}$, $^1/_{999}$ u. s. w. in Decimalbrüche verwandeln.

$^1/_9 = 0{,}1111 \ldots$ oder einstellig 0,1
$^1/_{99} = 0{,}0101 \ldots$ = zweistellig 0,01
$^1/_{999} = 0{,}001001 \ldots$ = dreistellig 0,001
$^1/_{9999} = 0{,}00010001 \ldots$ = vierstellig 0,0001
$^1/_{99999} = 0{,}0000100001 \ldots$ = fünfstellig 0,00001
$^1/_{999999} = 0{,}000001000001$ = sechsstellig 0,000001

Da nun das Produkt jedesmal dem Faktor gleich ist, wenn einer der beiden Faktoren 1 beträgt, so können wir uns bei einem periodischen Decimalbruche, dessen Periode 1 Ziffer zählt, vorstellen, der Zähler sei durch die Multiplication mit 1 d. i. mit 0,1 entstanden, z. B. 0,3 ist 3 mal so viel als 0,1, oder 0,333 ist 3 mal so viel als 0,111. Da nun 0,1 aus $^1/_9$ entstanden ist, so wird auch 0,3 aus 3 mal $^1/_9$ oder aus $^3/_9 = {}^1/_3$ entstanden sein, aus welchem sich zur Probe auch wieder 0,3333 . . . . ergibt. Zählt die Periode 2 Ziffern, so können wir uns den Zähler durch die Multiplication mit 0,01 oder aus der Entwicklung von $^1/_{99}$ entstanden denken. Z. B. 0,6363. Hier ist 63 mit 0,01, der Entwickelung aus $^1/_{99}$, multiplicirt worden. Daher muß denn 0,63 auch

63 mal $^1/_{99} = {}^{63}/_{99} = {}^7/_{11}$ sein. Verwandelt man diesen letzten Bruch in einen Decimalbruch, so wird man sich von der Richtigkeit des Verfahrens überzeugen. Zählt die Periode 3 Ziffern, so vergleichen wir sie mit der Entwickelung von $^1/_{999} = {}^{324}/_{999} = {}^{12}/_{37}$. Eben so ist die Zurückführung von Decimalbrüchen mit Perioden von 4 oder 5 oder 6 Ziffern auf gemeine Brüche, gegründet.

b) Unrein periodische Decimalbrüche. Man schneide die Ziffern, welche der Periode vorhergehen, ab, und verfahre dann wie mit rein periodischen Decimalbrüchen. Das Ergebniß multiplicire man mit 1, welcher rechts so viel Nullen angehängt werden, als die Anzahl der Ziffern beträgt, die man von der Periode abgeschnitten hat. Beispiel. Der Bruch sei: 0,36538461538 .... Die Periode ist hier 538461; ihr gehen die zwei Ziffern 6 und 3 vorher. Man schneide diese ab, welches eben so viel ist, als wenn man den Bruch mit 100 multiplicirt. Man hat also 36,538461. Da die Periode 6 Ziffern hat, so denken wir uns den Zähler 538461 durch die Multiplication mit 0,00001, der Entwickelung aus $^1/_{999999}$ entstanden, also ist der gewöhnliche Bruch = 538461 mal $^1/_{999999}$ oder $^{538461}/_{999999}$. Fügt man diesem die 2 vorher abgeschnittenen unperiodischen Ziffern 36, welche durch das Multipliciren mit 100 als Ganze abgesondert wurden, hinzu, so haben wir $36{}^{538461}/_{999999}$. Um aber den wahren Werth des Bruches wieder herzustellen, müssen wir das letzte Ergebniß wieder mit 100 dividiren. $100 : 36{}^{538461}/_{999999} = {}^{36538425}/_{99999900}$. Wird dieser Bruch mit 1923075 aufgehoben, so erhält man $^{19}/_{52}$, welcher zum Decimalbruch gebildet, wieder den obigen Bruch darstellt.

Gewöhnlich verfährt man auf folgende Weise, um einen Decimalbruch wieder in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln. Es sei der Decimalbruch 0,324324 ... gegeben, so nenne man diesen Werth = x. Also:

	x =	0,324324 .... dann ist
10	y =	3,243243 ....
100	x =	32,432432 ....
1000	x =	324,324324 ....
subtr.	x =	0,324324 ....
999	x =	324

$$x = {}^{324}/_{999} = {}^{12}/_{37}.$$

Der gegebene Bruch sei wie vorher: 0,365384615 ...

a)	x =	0,36538461538461 ....
b)	100 x =	36,538461538461.....
c)	100000000 x =	36538461,538 ...
b von c subtr.	100 x =	36,538 ...
99999900	x =	36538425

$$x = {}^{36538425}/_{99999900} - {}^{19}/_{52}.$$

NB. c ist hier der Decimalnenner des Zählers bis zur zweiten Periode.

Aus der Ansicht dieses letzten Verfahrens ergibt sich, daß man immer das Komma um die ganze Periode rechts rückt, d. h. den Decimal-

Digitized by Google

bruch mit einer Zahl multiplicirt, welche aus 1 und so vielen Nullen, als die Periode Ziffern zählt, besteht. Also für 0,324,324, setze man 324. Dann ist $1000\,x = 324{,}324{,}324\ldots$

$$1000\,x - x = 324{,}324, - 0{,}324$$

$$999\,x = 324 \text{ u. s. w. wie oben.}$$

Anmerkung. Für Schüler, die in algebraischen Arbeiten erfahren sind, mag dieses Verfahren nicht undienlich sein; jenes ist aber instruktiver.

§. 132. Für die Verwandlung der Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche ergeben sich nun folgende Regeln:

a) für rein periodische Decimalbrüche:

Man setze die Ziffern einer Periode zum Zähler, darunter so viel Neunen, als die Periode Ziffern enthält. Z. B. $0{,}3 = {}^{3}/_{9} = {}^{1}/_{3}$; $0{,}324324 = {}^{324}/_{999} = {}^{12}/_{37}$; $0{,}63 = {}^{63}/_{99} = {}^{7}/_{11}$.

b) für unrein periodische Decimalbrüche.

Man schreibe als Zähler alle Ziffern bis zur zweiten Periode hin, subtrahire dann von den niedrigsten Stellen der Periode die Zahl, welche durch die unperiodischen Ziffern bezeichnet wird. Der Rest gibt den Zähler, zum Nenner schreibt man so viel Neunen, als die Zifferanzahl der Periode beträgt, und rechts so viel Nullen, als unperiodische Ziffern im Zähler enthalten sind. Z. B. 0,36538461538. Die Zahl der unperiodischen Ziffern ist 36; die Periode enthält 6 Ziffern, nämlich 538461. Wir schreiben daher zum Zähler:

$$\begin{array}{r} 36538461 \\ \text{subtr.}\quad 36 \\ \hline 36538425 \end{array}$$

$99999900 = 6$ Neunen wie die Zifferanzahl der Periode und 2 Nullen wie die Anzahl der unperiodischen Ziffern.

$0{,}36538461 = {}^{36538461}/_{99999900} = {}^{19}/_{52}$. Dieß Verfahren wird durch folgende Darstellung deutlicher. Der gewöhnliche Bruch sei wie vorher $= x$, mithin $x = 0{,}36538461538461\ldots$ mit der zweifachen Periode. Man multiplicire zu beiden Seiten mit einer Zahl, welche die Ziffer 1 und so viel Nullen, als der Zähler bis zur zweiten Periode Ziffern zählt, bezeichnet, also hier mit 100000000. Ferner multiplicire man sowohl x als auch den Decimalbruch mit einer Zahl, welche 1 und so viel Nullen, als die Anzahl der unperiodischen Ziffern beträgt, enthält, hier also mit 100. Jedes dieser Produkte subtrahire von der ihm zugehörigen Zahl, und dividire jeden dieser beiden Reste mit dem Faktor von x, so ergibt sich das verlangte Resultat. Also:

$$x = 0{,}36538461538461\ldots$$

$$100000000\,x = 36538461{,}538461$$

$$100000000\,x - 100\,x = 36538461{,}538461 - 36{,}538461$$

$$99999900\,x = 36538425$$

$$x = \frac{36538425}{99999900} = \frac{19}{52} \quad x = \frac{19}{52}$$

10) Führe folgende rein periodische Decimalbrüche auf einen gewöhn-

lichen Bruch zurück: 0,35135... (= $^{351}/_{999}$ = $^{13}/_{37}$); 0,71428571 ... (= $^{5}/_{7}$); 0,52941176470589235 29 .... ($^{9}/_{17}$).

11) Ebenso reducire folgende unrein periodische Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche: 0,659090 .. (= $^{29}/_{44}$); 0,324141 ... (= $^{3209}/_{9900}$); 0,833 .... (= $^{5}/_{6}$).

Anmerkung. Der Lehrer lasse den Schüler sich fleißig üben, sowol gewöhnliche Brüche in Decimalbrüche, als auch rückwärts diese in jene zu verwandeln. Bei solchen Brüchen, welche unrein periodische Decimalbrüche geben, möge folgendes entlehnte Täfelchen, welches die Primzahlen unter 100 enthält, dem Lehrer zur Erleichterung dienen:

a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Nenner.	Ziffernanzahl der Periode.	Nenner.	Ziffernanzahl der Periode.	Nenner.	Ziffernanzahl der Periode.	Nenner.	Ziffernanzahl der Periode.	Nenner.	Ziffernanzahl der Periode.	Nenner.	Ziffernanzahl der Periode.
3	1	17	16	31	15	47	46	67	33	83	41
7	6	19	18	37	3	53	13	71	35	89	44
11	2	23	22	41	5	59	58	73	8	97	96
13	6	29	28	43	21	61	60	79	13		

Die Reihen a enthalten die Nenner zu gewöhnlichen Brüchen, bei welchen man den Zähler nach Belieben setzen kann; z. B. zu dem Nenner 7 kann ich die Zähler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 u. s. w. nehmen, also $^{1}/_{7}$, $^{2}/_{7}$, $^{3}/_{7}$ u. s. w. Die Reihen b enthalten die Anzahl der Ziffern, welche eine Periode solcher Decimalbrüche zählt, die aus gewöhnlichen Brüchen mit nebenstehendem Nenner gebildet worden sind. Z. B. neben 7, dem Nenner von $^{1}/_{7}$, $^{5}/_{7}$, $^{6}/_{7}$ ꝛc. steht in der zweiten Reihe 6, welche die Anzahl der periodischen Ziffern aller solcher Decimalbrüche anzeigt, die aus Brüchen mit dem Nenner 7 gebildet werden können: z. B.

$^{1}/_{7}$ = 0,14285714285714 .... sechsziffrige Periode
$^{2}/_{7}$ = 0,28571428571428 .... " "
$^{3}/_{7}$ = 0,42857142857142 .... " " u. s. w.

Gibt nun der Lehrer den Schülern Brüche mit obigen Nennern zur Verwandlung in Decimalbrüche, so kann er dadurch, daß er die Anzahl der Ziffern einer dazu gehörigen Periode kennt, gleich wissen, ob der Schüler recht gerechnet hat oder nicht. Z. B. es wäre der obige Bruch $^{9}/_{17}$ zur Verwandlung in einen Decimalbruch gegeben, der Schüler brächte eine 11ziffrige oder 19ziffrige Periode heraus, so könnte der Lehrer ihn gleich bedeuten, daß die Rechnung unrichtig sei, da nach der Tafel der Nenner 17 eine 16ziffrige Periode erfordert.

§. 133. Addiren mit Decimalbrüchen.

Es ist hier besonders darauf zu sehen, daß die Zahlen gleicher Ordnung oder die gleichnamigen Zahlen unter einander gestellt werden, also Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. Uebrigens verfährt man gerade so, wie beim Addiren ganzer Zahlen.

12) 0,729 + 0,875 = 1,604

13) 7 + 4,36 = 11,36

14) 7,438 + 2,917 + 0,08 + 3,9 = 14,335

15) 0,0017 + 9,25 + 365,47869 + 27,0009 + 52,7 = 454,43129

§. 134. Subtrahiren mit Decimalbrüchen.

Auch hier müssen, wie vorher beim Addiren, die Zahlen gleicher Ordnung unter einander gestellt werden. Das Verfahren kommt mit dem Subtrahiren ganzer Zahlen überein. Sind z. B. die Zehntel im Minuend zu klein gegen die Zehntel im Subtrahend, so borgt man in der Einerstelle einen Einer $= {}^{10}/_{10}$ u. s. f.

16) 7,6 − 2,3 = 5,3

17) 25,2 − 8,7 = 16,5

18) 12,48 − 7 = 5,48

19) 13,867 · 4,5 = 9,367

Da 4,5 = 4,500 ist so konnte man hier auch setzen 13,867 · 4,500 = 9,367

20) 79,1201 + 24,8937 = 54,2264

21) 683,8 · 75,4786 = 608,3214 = 683,8000 · 75,4786 = 608,3214

1. Anmerkung. Es läßt sich auch hier die gewöhnliche Probe des Subtrahirens anwenden.

2. Anmerkung. Der Lehrer hüte sich, über alle einzelne kleine Vorfälle das Verfahren mündlich mitzutheilen oder vorher Regeln zu geben. Man verwirrt dadurch den Schüler gar leicht. Vormachen und dann die Regel vom Schüler selbst auffinden lassen, ist weit besser. —

§. 135. Multipliciren mit Decimalbrüchen.

a. Wenn einer der beiden Faktoren ein Decimalbruch, der andere aber 10 oder 1000 u. s. w., so setze man bei 10 das Decimalkomma eine Stelle, bei 100 zwei Stellen, bei 1000 drei Stellen, bei 10000 vier Stellen u. s. f. rechtshin voran: z. B.

$$0{,}7589 \times 10 = 7{,}589$$
$$0{,}7589 \times 100 = 75{,}89$$
$$0{,}7589 \times 1000 = 758{,}9$$
$$0{,}7589 \times 10000 = 7589$$

Der Beweis ist aus dem Vorigen klar.

b. Wenn einer der beiden Faktoren bloß aus einer ganzen Zahl besteht, die nicht 10 oder ein Produkt aus Zehnern ist, so multiplicire man gerade so, als wäre der Bruch eine ganze Zahl, und schneide vom Produkt so viel Ziffern ab, als der eine Faktor Decimalstellen hat.

22) 2,25 × 7 = 15,75

23) 12 × 3,7 = 84 + 36 = 44,4

24) 82,027 × 9 = 738,243

25) 345,713 × 24 = 1382852 + 691426 = 8297,112

26) 0,0029 × 12 = 00058 + 00029 = 00,0348 = 0,0348.

Von der Richtigkeit des Produkts kann man sich überzeugen, wenn man dem Decimalbruch die gewöhnliche Bruchform gibt, und dann auf die gewöhnliche Weise multiplicirt. Indem man den Decimalbruch als ganze Zahl betrachtet, hat man ihn mit seinem Nenner multiplicirt, daraus folgt ganz natürlich, daß man das Produkt auch wieder mit diesem Nenner dividiren, d. h. eben so viel Stellen abschneiden muß, als der gegebene Decimalbruch enthält.

c. Bestehen beide Faktoren aus einem Decimalbruch, so multiplicirt man beide so, als wären sie ganze Zahlen und schneidet nachher vom Produkt so viel Stellen ab, als die Summe der Decimalstellen beider Faktoren beträgt.

27) 2,5 × 3,7 = 175 + 75 = 9,25

28) 3,2103 × 5,025 = 160515 + 64206 + 1605150 = 16,1317575

29) 0,023 × 0,036 = 138 + 69 = 0,000828

Bei Aufgabe 29 haben die beiden Faktoren zusammen 6 Decimalstellen, daher müssen hier auch 6 Stellen abgeschnitten werden. Da sich aber im Produkt nur 3 Stellen vorfinden, so muß man links noch 3 Nullen vorsetzen, das wahre Produkt ist daher 0,000828.

Die Richtigkeit des Verfahrens läßt sich an einem einzigen Beispiele darthun. Wenn man bei Aufgabe 27 statt 3,7 das Zehnfache, nämlich 37, nimmt, so wird man natürlicher Weise auch das zehnfache Produkt erhalten; ebenso wird sich auch das Zehnfache ergeben, wenn man statt 2,5 auch 25 nimmt. Wenn aber ein zehnfaches Produkt noch einmal zehnfach genommen wird, so erhält man das hundertfache Produkt. Um daher das wahre Ergebniß zu erhalten, muß ich das hundertfache Produkt wieder mit 100 dividiren, d. h. zwei Ziffern abschneiden. Daraus ergibt sich nun die Regel: Sollen Decimalbrüche mit einander multiplicirt werden, so sehe man sie als ganze Zahlen an, multiplicire sie auch als solche, und schneide vom Produkt von der rechten Seite her so viel Ziffern ab, als die Summe der Decimalstellen beider Faktoren beträgt.

d. Einen Decimalbruch mit einem gewöhnlichen Bruche zu multipliciren. Beispiel.

30) $0{,}75 \cdot {}^3/_4 = \frac{0{,}75 \cdot 3}{4} = \frac{2{,}25}{4} = 0{,}56^1/_4 = 0{,}5625.$

31) $2{,}4 \times {}^5/_6 = \frac{2{,}4 \times 5}{6} = {}^{12}/_6 = 2{,}0 = 2.$

Man kann auch den gewöhnlichen Bruch vorher in einen Decimalbruch verwandeln, und dann multipliciren $0{,}75 \times {}^3/_4 = 0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625.$

§. 136. Dividiren mit Decimalbrüchen.

a. Ist der Divisor 10 oder 100 oder 1000 oder überhaupt ein Produkt aus Faktoren von 10, so rückt man im Dividend das Decimalkomma um 1 oder 2 oder 3 Stellen u. s. w. links hin, und die Division ist geschehen. Der Beweis ist aus dem Vorigen klar.

32)
10 : 9657,3 = 965,73
100 : 9657,3 = 96,573
1000 : 9657,3 = 9,6573
10000 : 9657,3 = 0,96573

33)
10 : 0,57 = 0,057
100 : 0,57 = 0,0057
1000 : 0,57 = 0,00057
10000 : 0,57 = 0,000057.

b. Wenn der Divisor aus einer ganzen Zahl besteht, die nicht 10 oder ein Produkt aus Zehner ist, so betrachte man den Dividend als ganze Zahl und schneide dem Quotient so viel Decimalstellen ab, als der Dividend enthält:

34) 2 : 7,5 = 3,7½ oder 3,7, oder 3,8 oder genau 3,75.

c. Besteht der Dividend aus einer ganzen Zahl, so gebrauche man den Divisor ebenfalls als solche, und rücke das Decimalkomma des Quotienten so viel Stellen rechts, als der Divisor Decimalstellen hat, oder noch kürzer, man multiplicire den Divisor und den Dividend mit dem Nenner des Divisors und dividire dann auf die gewöhnliche Weise.

35) 3,5 : 77 = 2,2 oder 3,5 : 77
70 d. i. 22 = 35 : 770 = 22
70
70

36) 0,7 : 45
= 7 : 450 = 64,28 . . .
42
30
28
20
14
60
56

d. Wenn beide, sowohl der Dividend als auch der Divisor, Decimalbrüche sind und zwar:

1) wenn beide gleich viel Decimalstellen haben. Man sehe beide als ganze Zahlen an, und dividire, so erhält man gleich den richtigen Quotient:

37) 2,45 : 48,75

= 245 : 4875 = 19,89 . . . .

245

2425

2205

2200

1960

2400

2205.

2) Wenn Divisor und Dividend mit gleicher Zahl multiplicirt werden, so bleibt der Quotient unverändert; hier sind beide mit 100 multiplicirt worden, folglich muß der Quotient 19,89 . . . richtig sein.

c. Wenn die Anzahl der Decimalstellen des Divisors und des Dividends ungleich ist. Man multiplicirt in diesem Falle a) beide mit dem größten Decimalnenner, dividirt dann wie gewöhnlich und man erhält gleich den richtigen Quotienten; oder b) man multiplicirt beide mit dem Nenner des Divisors, und verfährt dann wie folgendes Beispiel zeigt:

38) a. 5,7 : 374,236

= 5700 : 374236 = 65,65 . . . .

34200

32236

28500

37360

34200

31600

28500

b. 5,7 : 374,236

57 : 3742,36 = 65,65 . . .

342 . . .

322 . .

285 . .

373 .

342 .

316

285

39) 2,375 : 89,7

= 2375 : 89700 = 37,768 . . . .

7125

18450

16625

18250

16625

16250

14250

2000 u. s. w.

Wenn der Schüler die Richtigkeit des Verfahrens einsieht, so kann ihm der Lehrer auch folgende Regel zum Dividiren geben: Gib dem Divisor und dem Dividend eine gleiche Anzahl von Decimalstellen, und dividire dann wie mit ganzen Zahlen: z. B. 3,7 : 89,752 = 3,700 : 89,752 = 3700 : 89752; 4,239 : 25,6 = 4,239 : 25,600 = 4239 : 25600.

Die Richtigkeit des Verfahrens beruhet auf obigen Gründen.

f. Soll ein Decimalbruch durch einen gewöhnlichen Bruch dividirt werden, so verwandle man entweder diesen in einen Decimalbruch, und verfahre dann wie vorher gezeigt, oder man dividire auf die gewöhnliche Weise.

40) $\frac{2}{3}$: 74,25

0,66 : 74,25

= 112,5

oder genauer:

$\frac{2}{3}$	:	74,25
3		3
2	:	222,75
	=	111,375

41) $\frac{3}{4}$: 25,47

0,75 : 25,47

= 34 bein.

oder:

$\frac{3}{4}$	:	25,47
4		4
3	:	101,88
		33,95

§. 137. Im §. 127 ist schon der Abkürzung eines Decimalbruchs erwähnt worden. Außer dieser erwähnten und in Anwendung gebrachten Methode, wendet man im Multipliciren und Dividiren noch andere Abkürzungen an, mit welchen wir uns bekannt machen müssen. Ein Beispiel wird die Sache klar machen. Es soll 3,43215 mit 4,36252 multiplicirt werden. Also:

42)

	3,43215
	4,36252
	13,72860
	1,02964
	20593
	686
	171
	7
	14,97281

Anstatt, wie gewöhnlich, auf der rechten Seite das Multipliciren zu beginnen, fängt man hier links bei der Ziffer 4 an, und multiplicirt jede Ziffer des Multiplicandus. Nun wird mit 3 multiplicirt und zwar so, daß ich von dem Produkt aus der Endziffer 5 = 15 die 5 Einer wegwerfe und den Zehner zu dem folgenden Produkt zähle, also 3 mal 1 + 1 = 4, welche unter die 0 gestellt wird. Die Endziffer 5 im Multiplicand bezeichnet 100000stel, also auch die Endziffer 0 im Produkt. Die 1 in der folgenden Stelle bezeichnet 10000stel und da diese mit 3 Zehnteln multiplicirt wird, so muß das Produkt ebenfalls 100000stel geben, und 4 unter die 0 zu stehen kommen. Auf demselben Grunde beruht die ganze Zusammenstellung aller Produkte. Die Ziffer des Multiplicators 6 fängt mit der Ziffer 2 im Multiplicand an; das Produkt wird aber um 1 vermehrt, weil 6 mal 15 = 90 d. i. $\frac{90 \ldots}{100 \ldots}$ = $\frac{9}{10}$ beträgt, und dieß für 1 gerechnet und zu dem Produkt von 6 mal 2 gezählt wird. Die Ziffer 2 im Multiplicator fängt mit der Ziffer 3 im Multiplicand an; es wird aber nichts zugezählt, weil das vorherge-

hende Produkt 2 . 2 = 4 unter 5, mithin unter einer halben höhern Einheit der nächsten Ordnung bleibt. Die Ziffer 5 des Multiplicators beginnt ihre Operation mit der Ziffer 4 des Multiplicands, die letzte untere Ziffer 2 mit der ersten oberen Ziffer 3 und setzt wegen des vorhergehenden Produkts 8 noch 1 zu.

Die vollständigste Multiplication würde das Produkt 14,9728230180 geben. Erst in der fünften Decimalstelle zeigt sich ein Unterschied von 1 = $^1/_{100000}$ an Werth, welcher in den praktischen Aufgaben nicht in Betracht kommen kann.

Aus diesem Beispiele wird man leicht entnehmen können, wie man überhaupt bei dem abgekürzten Multipliciren zu verfahren hat. Zur Uebung noch folgendes Beispiel:

43) 12,54321
9,12345
112,88889
1,25432
25086
3763 d. i. 2 + 1 durch die Verm. um 1
501 : 0 + 1 : : : 1
62 : 0 + 2 : : : 2
114,43733

Wenn es nicht auf große Genauigkeit ankommt, so bringt man die weggelassenen Bruchstellen in gar keinen Anschlag, und dann fällt die Vermehrung der nächst höhern Ordnung weg. Die vollständige Multiplication dieser Aufgabe gibt 114,4373546745.

§. 138. Abgekürztes Dividiren.

Beispiel.

44) 3,75432 : 79,76532 = 21,24628
750864
467892
375432
92460
2mal 3,7543 = 75086
17374
4mal 3,754 = 15017 d. i. mit der Verm. 1
2357
6 . 375 = 2252 d. i. mit der Verm. 2
105
2 . 37 = 75 d. i. 2 . 37 + 1
30
29 d. i. 8 . 3 + 5.

Sobald der Dividend keine Stellen zum Herabrücken mehr übrig hat, dividirt man jedesmal in den Rest, nimmt dann aber auch jedesmal vom Divisor eine Decimalstelle weniger. Statt des Divisors 3,75432

erhält man dann die Divisoren 3,7543; 3,754; 3,75; 3,7; 3; wobei jedoch zu merken ist, daß man, wenn die weggelassene Decimalstelle mit dem neuen Quotient ein Produkt von einer oder mehrern nächsthöheren Einheiten bildet, diese für die nächste Stelle addirt. —

Die vollständige Division gibt den Quotienten 21,24627. Erst in der fünften Decimalstelle findet sich ein kleiner Unterschied von $^1/_{100000}$, da aber der Rest $^{231136}/_{375432}$ über $^1/_2$ ist, so erhalten wir auf beide Arten den Quotienten 21,24628.

45) 5,32154 : 3869,75934 = 727,18787

	3725078
	1446813
	1064308
	3825054
	3725078
	99976
1mal 53215 =	53215
	46761
8mal 5321 + 4 =	42572
	4189
7mal 532 =	3724
	465
8mal 53 + 1 =	425
	40
7mal 5 + 2 =	37

Die vollständige Division gibt den Quotienten 727,18787 . . .

§. 139. Reduciren in Decimalbrüchen.

Anmerkung. Die Sache an sich kann keine Schwierigkeit haben, da sie in dem Vorhergehenden begründet ist. Der Schüler soll aber die gebräuchliche und vortheilhafte Verfahrungsweise kennen lernen, und deshalb nehme der Lehrer diesen Abschnitt besonders vor. Das Verfahren ist aber zweierlei, wie an folgendem Beispiel zu ersehen ist.

46) 3 Thaler 23 Sgr. 3 Pfg. sollen in einem tausendtheiligen Thalerbruche dargestellt werden.

Erste Weise: 3 Thl. 23 Sgr. 3 Pfg. = 3 Thl. $23^1/_4$ Sgr.

3 Thl. $23^1/_4$ Sgr. $= 3 + \frac{23^1/_4}{30} = 3$ Thl. $+ {}^{93}/_{120} = {}^{31}/_{40}$

$3^{31}/_{40} = 3^{31,000}/_{40} = 3{,}775$ Thl.

Zweite Weise: 3 Pfg. $= {}^{3,000}/_{40} = 0{,}250$ Sgr. $= 0{,}25$ Sgr.

$23{,}25 = {}^{23,250}/_{30} = 0{,}775$ Thl.

3 Thl. 23 Sgr. 3 Pfg. = 3,775 Thl.

Das letztere Verfahren ist vorzuziehen.

47) 72 Pfund 18 Loth sollen in einem 1000theiligen Centnerbruch dargestellt werden.

18 Loth $= {}^{18,000}/_{32} = 0{,}562^1/_2$, statt dieses Werths nehme man entweder 0,562 oder 0,563 Pfd. 72,563 Pfd. $= {}^{72,563}/_{110} = 0{,}659^{73}/_{110}$, dafür 659 + 1 = 0,660 oder 0,66.

Digitized by Google

48) Eine Piſtole zu 5 Thl. 19 Sgr. 6 Pfg. ſoll in ganzen Thalern und einem 100theiligen Thalerbruch dargeſtellt werden.

6 Pfg. $= {}^{6,00}/_{12} = 0{,}5$ Sgr.
19,5 Sgr. $= {}^{19,50}/_{30} = 0{,}65$ Thl.
5 Thl. 19 Sgr. 6 Pfg. $= 5{,}65$ Thl.

49) 95 Tage, 19 Stunden, 43 Minuten ſollen in einem zehntauſendtheiligen Bruche von Jahren dargeſtellt werden.

43 Minuten $= {}^{430000}/_{60}$ Stunden $= 0{,}7166 \ldots$
19,7166 Std. $= {}^{19,7166}/_{24}$ Tage $= 0{,}8125$ Tage
95,8125 Tage $= {}^{94,8125}/_{365} = 0{,}2625$ Jahr, genau.

50) 1 brab. Kronenth. gilt jetzt 1 Thl. 16 Sgr. und 4 Pfg. Wie werden dieſe Sgr. und Pfg. in einem 1000theiligen Thalerbruche ausgedrückt?

4 Pfg. $= {}^{4,000}/_{12} = 0{,}333 \ldots$ Sgr.
${}^{16,333}/_{30}$ Thaler $= 0{,}544 \ldots$ Thl.
1 brab. Kronenthl. $= 1{,}544 \ldots$ Thl.

§. 140. Reſolviren in Decimalbrüchen.

Anmerkung. Sollte dem Schüler irgend ein Verfahren mit Decimalbrüchen nicht einleuchtend und überzeugend ſein, ſo laſſe der Lehrer dieſelbe Operation in gewöhnlichen Brüchen vornehmen, da dann der Schüler bald die Richtigkeit des Verfahrens einſehen wird.

51) 0,279 Thaler, wie viel Silbergr. und Pfg.?

0,279 — 279

1 Thl. $= 30$ Sgr. denn $0{,}279 = {}^{279}/_{1000}$: 30

Sgr.	8 | 370	8 | 370	$= 8$ Sgr.
	12	12	
	740	740	
	3 | 70	370	
Pfg.	4 | 440	4 | 440	$= 4$ Pfg.

Antw. 8 Sgr. 4 Pfg. zbr.

52) 7,3769 Ctr.; wie viel Ctr., Pfd., Loth und Quentchen?

7 Ctr. $= 7$ Ctr. 0,3769

110

37690

3769

41	4590	$= 41$ Pfd.
	32	
	9180	
13	770	
14	6880	$= 14$ Loth.
	4	
2	7520	$= 3$ Quent.

53) 0,513 Jahre, wie viel Monate, Tage, Stunden und Minuten?

0,513
12
1026
513
6156 = 6 Monate
30
4680 = 4 Tage
24
2720
1360
16320 = 16 Stunden
60
19200 = 19 Minuten

0,513 Jahre = 6 Mon. 4 Tage 16 Stunden 19 Minuten.

54) Vorher fanden wir den Werth des brab. Kronenth. = 1,544 Thl.; — wie viel Sgr. und Pfg. macht dieser Decimalbruch?

1544 = 1 Thaler
30
16320 = 16 Sgr.
12
640
320
3840 = d. i. 4 Pfg.

Anmerkung. Wer die vier Grundrechnungsarten in Decimalbrüchen versteht, kann auch darnach praktische Proportionsaufgaben berechnen. Der Lehrer diktire dem Schüler solche Aufgaben mit Decimalbrüchen, aber lasse die gewöhnlichen Brüche, welche in Regeldetri-Aufgaben vorkommen, auch in Decimalbrüchen ausdrücken und die Aufgaben in beiden Bruchformen rechnen.

1. Beispiel: Für $^3/_4$ Thl. erhält man $4^1/_2$ Pfd., wie viel für $3^3/_4$ Thl.?

a. Mit gew. Brüchen: $^3/_4$ Thl. : $3^3/_4$ Thl. = $4^1/_2$ Pfd. : x

3	: 15	= $4^1/_2$	: x
1	: 5	= $4^1/_2$	: x
	x	= $22^1/_2$ Pfd.	

b. Mit Decimalbrüchen:

$^3/_4 = 0{,}75$
$^1/_2 = 0{,}5$

0,75 : 3,75 = 4,5 : x

4,5
1875
1500
0,75 : 16,875
75 : 1687,5 = 22,5 Pfund
150
187
150
375
375

Digitized by Google

2. Beispiel. Für $2\frac{1}{2}$ Ohm Wein werden 115 Thaler bezahlt; wie viel kosten davon $19\frac{1}{2}$ Maß?

a. Mit gemein. Brüchen: $2\frac{1}{2}$ Ohm : $19\frac{1}{2}$ Maß = 115 Thl. : x
= 260 M. : $19\frac{1}{2}$ M. = 115 : x
x = $8\frac{5}{8}$ Thaler.
= 8 Thl. 18 Sgr. 9 Pfg.

b. Mit Decimalbrüchen:
$2\frac{1}{2}$ Ohm = 2,5 Ohm
$19\frac{1}{2}$ M. = $\frac{19,5}{104}$ = 0,187 Ohm

2,5 : 0,187 = 115 : x
115
935
187
187
2,5 : 21,505
25 : 215,05 = 8,602 = 8 Thl.
200 30
150 18|060 = 18 Sgr.
150 12
50 120
50 60
720 = 1 Pfg.

Also 8 Pfenning Unterschied.

3. Beispiel. Ein Kaufmann gewann an einer Waare, welche ihm 1749 Thl. 22 Sgr. 6 Pfg. zu stehen kam, 12 proc.; wie viel betrug der ganze Gewinn?

22 Sgr. 6 Pfg. = 22,5 Sgr.
22,5 Sgr. = 0,75 Thl.

1749,75
12
349950
174975
209|9700
30
29|1000
12
1|2000.

Der Gewinn beträgt also 209 Thl. 29 Sgr. 1 Pfg.

Man braucht hier nur die Summe mit 12 zu multipliciren und das Komma noch 2 Stellen weiter links zu rücken, als die Multiplication selbst verlangt.

4. Beispiel. 1 Pfund einer Waare kostet 3 Thl. 17 Sgr. 6 Pfg. Wie viel kosten davon 765 Pfd. 24 Loth?

3 Thl. 17 Sgr. 6 Pfg. = 3 Thl. 15 Sgr. + 2 Sgr. 6 Pfg.
15 Sgr. = 0,5 Thl.
2 Sgr. 6 Pfg. = $2\frac{1}{2}$ Sgr. = der 6te Theil von 15 Sgr.

Digitized by Google

765 Pfd. 24 Loth = 765,75 Pfd.

Also :	765,75
Das Pfd. zu 3 Thl.	2297,25
15 Sgr. = 1/6 von 3 Thl.	382,875
2 1/2 Sgr. = 1/6 von 15 Sgr.	63,812
	2743,937
	30
	28 | 110 = 28 Sgr.
	12
	220
	110
	1,320 = 1 Pfg.

Die Rechnung nach gewöhnlichen Brüchen gibt 2743 Thl. 28 Sgr. 1 1/2 Pfg.

5. Beispiel. 1 Pfd. kostet 2 Thl. 27 Sgr. 9 Pfg.; wie viel kosten 537 Pfd. 13 Loth dieser Waare?

13 Loth = 13000/32 = 0,406 Pfund.

	537,406 Pfd.
Das Pfund zu 2 Thl. . .	1074,812
27 Sgr. = 15 + 12 daher 15 Sgr. = 1/2 Thl. Hier nehme ich entweder die Hälfte von 537,406 oder 1/4 von 1074,812 weil 1/2 = 1/4 von 2 ist	268,703
12 Sgr. = 10 + 2 Sgr.; 10 Sgr. = 1/3 Thl., daher 1/3 . 537,406	179,135 . . .
2 Sgr. ist der 5te Theil von 10 Sgr., daher 1/5 von 179,135	35,827
9 Pfg. = 6 + 3 Pfg. 6 Pfg. = 1/2 Sgr. und dieß 1/4 von 2 Sgr., daher 1/4 von 35,827	8,956 . . .
3 Pfg. = 1/2 von 6 Pfg., daher nur noch die Hälfte von 8,956	4,478
	(3)
	1571,911

6. Beispiel. 1. Elle kostet 17 Sgr. 9 Pfg.; wie viel kosten 67 3/4 Ellen?

17 Sgr. 9 Pfg. = ...	17,75
Dann kosten 8 Ellen	142,00
: : 64 : 8mal 142,00 . . .	1136,00
3 Ellen = 3 mal 17,75	53,25
3/4 = 1/2 + 1/4 Elle, daher 1/2 mal 17,75	8,875
1/4 Elle ist die Hälfte von 1/2 Elle, daher 1/2 mal 8,87	4,437
	1202,562 Sgr.
	= 40 Thl. 2 Sgr. 7 Pfg.

Digitized by Google

Wenn etwa der deutsche Zollverein für das kaufmännische Rechnen und Buchhalten die Decimalbrüche einführen wollte, so könnte der Lehrer dabei auf folgende kleine praktische Rechenvortheile aufmerksam machen:

0,1 Thaler pr. $= \frac{1}{10}$ Thl. = 3 Sgr.; 0,2 $= \frac{2}{10} = 2 \cdot 3 =$ 6 Sgr.; 0,3 Thl. $= \frac{3}{10}$ Thl. $= 3 \cdot 3 = 9$ Sgr. Ich kann also bei preuß. Thalern immer für die erste Decimalstelle so vielmal 3 Sgr. nehmen, als sie Einer zählt.

0,01 Thl. $= \frac{1}{100}$ Thl. $= \frac{360}{100}$ Pfg. $= 3\frac{6}{10}$ oder 3,6 Pfg., wofür man im bürgerlichen Geschäftsleben unbedenklich $3\frac{1}{2}$ Pfg. nehmen kann. In einem Decimalbruche von preuß. Thalern kann man für die zweite Decimalstelle so oftmal $3\frac{1}{2}$ Pfenning nehmen, als sie Einer enthält.

0,001 preuß. Thl. $= \frac{1}{1000}$ Thl. $= \frac{360}{1000} = \frac{36}{100} = \frac{33\frac{1}{3}}{100} + \frac{2\frac{2}{3}}{100} = \frac{1}{3}$ Pfg. $+ \frac{8}{300}$ Pfg. Letztern Bruch kann man wegwerfen und statt $\frac{36}{100}$ unbedenklich $\frac{1}{3}$ Pfg. nehmen.

Sollte nun Jemand etwa 7,569 preuß. Thaler zahlbar darstellen, so hätte er 7 Thaler + 5mal 3 Sgr. + 6mal $3\frac{1}{2}$ Pfg. + 9mal $\frac{1}{3}$ Pfg. = 7 Thl. + 15 Sgr. + 21 Pfg. + 3 Pfg. = 7 Thl. + 15 Sgr. + 24 Pfg. = 7 Thl. 17 Sgr. Der Fehler, welcher hier gemacht wird, indem statt 3,6 nur 3,5 und statt 0,36 nur $0,33\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{3}$ Pfg. genommen wurde, beträgt $\frac{1}{100}$ Sgr. oder stark 0,8 oder $\frac{4}{5}$ Pfg.

Sind Gulden mit Decimalbrüchen ausgedrückt und diese zahlbar zu berechnen, so müßte man die vorige 3 für die erste Decimalstelle verdoppeln (weil der Thaler 30 Sgr., aber der Gulden 60 Kreuzer zählt). Beispiel.

0,1 Gulden $= \frac{1}{10}$ Gld. $= \frac{60}{10} = 6$ Kreuzer; 8,9 Gulden sind demnach 8 Gulden 54 Kreuzer.

0,01 Gulden $= \frac{1}{100}$ Gld. $= \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$ Kreuzer. Also 6,75 Gld. = 6 Gulden + 7 mal 6 Kreuzer + 5 mal $\frac{6}{10}$ Krz. = 6 Gld. + 42 Krz. + 3 Krz. = 6 Gulden 45 Kreuzer.

Eine dritte Decimalstelle kommt bei Gulden im bürgerlichen Verkehr nicht vor.

Solche Anordnungen und Vortheile im praktischen Rechnen sind für das Geschäftsleben von großem Werthe, den Schülern meistens sehr willkommen, befördern Gewandtheit im Rechnen, und reizen an, immer neue Vortheile zu erfinden.

Achtzehnter Abschnitt.

Von entgegengesetzten Größen.

Anmerkung. Dieser Abschnitt ist einiger folgenden Abschnitte wegen nothwendig, in der Mathematik überhaupt aber von großer Wichtigkeit. Bei manchen Schülern findet der Lehrer nicht geringe Schwierigkeit, das Rechnen mit dieser Art Größen begriflich zu machen. Will es ihm, bei aller angewandten Mühe, nicht gelingen, so bleibt nichts anders übrig, als die schwierigen Fälle dem Gedächtnisse des Schülers anzuvertrauen, bis er, in der Folgezeit, wenn die Geisteskraft desselben mehr und vielseitiger geübt worden ist, den Versuch erneuern kann.

§. 141. Man kann jede Zahlengröße an und für sich, absolut, oder in Beziehung und Anwendung auf äußere Gegenstände betrachten. In letzterem Falle aber ist es durchaus nothwendig, sich zu überzeugen, daß sowol die Zahlengrößen, als auch die Operationen, welche damit vorgenommen werden, immer rein, als reine Zahl zu nehmen sind, die Beziehung derselben mag sein, welche sie wolle. Daher sind die Rechenoperationen in den vier Grundrechnungsarten benannter und unbenannter Zahlen einerlei.

Eine besondere Beibenennung der Zahlengrößen ist die, der Entgegensetzung oder des Positiven (Bejahenden) und Negativen (Verneinenden), nach welcher sie in gegenseitiger Beziehung einander mindern oder gar vernichten. Auf die Zahlengröße an und für sich hat auch diese Beibenennung keinen Einfluß, da z. B. $2 \cdot 5 = 10$ in allen möglichen Beziehungen ist; aber eben dadurch, daß einer Zahl das Prädikat positiv oder negativ beigelegt wird, erhält sie nun einen beziehlichen (relativen) Werth, der für die Zahlwissenschaft wohl zu merken ist. Durch die besondere Beziehung solcher Größen auf Vermögen und Schuld hat man sie häufig unter einem anschaulichen Bilde allgemein dargestellt, und in vielen Fällen wird dieses Bild passend gefunden. Der Begriff von Schuld hebt nicht allein den Begriff von Vermögen zum Theil oder ganz auf, sondern setzt auch in vielen Fällen noch etwas dem Vermögen Entgegengesetztes. 10 Thaler Vermögen und 10 Thl. Schuld $= 0$; aber 10 Thl. Vermögen und 20 Thl. Schuld $= 0$ Thl. Vermögen und 10 Thl. Schuld. Man kann die eine von diesen entgegengesetzten Größen als etwas Wirkliches, Besitzthümliches (Positives), die andere aber als etwas Mangelndes, Verschuldendes (Negatives) ansehen. Jene bezeichnet man daher mit $+$ (plus), diese mit $-$ (minus). Welche Größe aber als positiv und welche als negativ angesehen wird, das hängt jedesmal von dem Gesichtspunkte des Betrachtenden ab. Wer die Schuldsumme des Falliten M ermitteln will, für den ist jeder Schuldposten positiv und jeder Besitzposten negativ; im Gegentheil: wer das Vermögen des Kaufmanns N schätzen will, der betrachtet jede Schuldsumme, die Passiva als negativ und die Activa als positiv. Entgegengesetzte Begriffe sind aber z. B. Mangel und Ueberfluß, Einnahme und Ausgabe, Addition und Subtraction, vorwärts und rückwärts, Gewinn und Verlust, überhaupt zwei Eigenschaften, welche zwischen sich einen Differenzpunkt haben, wo beide in 0 aufgehen. Nennt man bei

Zahlengrößen diesen Indifferenzpunkt 0, so können wir auf der einen Seite durch fortgesetztes Addiren von 1 die natürliche positive, und auf der andern Seite durch fortgesetztes Subtrahiren von 1 die natürliche negative Zahlenreihe bilden.

f	e	d	c	b	a	b	c	d	e	f
...—5,	—4,	—3,	—2,	—1,	0,	1,	2,	3,	4,	5...

Links können wir diese Zahlenreihe als Mangel und rechts als Besitz ansehen, wo dann die Summe zweier Glieder, welche von a gleich weit abstehen, also b und b, c und c, d und d ꝛc., jedesmal 0 sein wird. Weder die Zahlenreihe links, noch die rechts, bilden für sich entgegengesetzte Zahlen, oder kürzer und deshalb besser Gegenzahlen; sondern erst in ihrer gegenseitigen Beziehung erscheinen sie einander als solche. Jede Reihe, für sich betrachtet, enthält einstimmige Größen.

Man hat auch wol gesagt, eine negative Größe sei weniger als nichts, welche Behauptung allerdings dadurch einen Schein von Wahrheit erhält, daß ich bei — 10 Thl. oder bei 10 Thl. Schuld wirklich erst 10 Thl. erwerben muß, um 0 Thl. zu haben, und wer dagegen + 10 Thl. oder 10 Thl. Vermögen hat, wirklich 20 Thl. mehr besitzt als ich. Es ist aber, wie wir eben gesehen haben, einleuchtend, daß, von dem entgegengesetzten Standpunkte betrachtet, + 10 Thl. ebenfalls weniger als nichts sein können, da, auf Schuld bezogen, 10 Thl. Vermögen auch verneinend sind. Es ist daher eine irrige Behauptung, wenn man negative Größen als solche bestimmt (definirt), die weniger als nichts seien. Beziehungsweise kann man eine solche Erklärung allenfalls gelten lassen; an und für sich betrachtet bezeichnet aber jede, die negative sowol als die positive, eine wirkliche Größe. Verbindet man beide, so wird die eine durch die andere zum Theil oder ganz aufgehoben, und dieß ist denn auch das wesentliche Merkmal dieser Art Zahlengrößen. Noch muß hier bemerkt werden, daß eine Zahlengröße in Beziehung auf eine entgegengesetzte desto kleiner ist, je größer sie für sich allein (absolut) betrachtet, erscheint, und desto größer, je kleiner ihr absoluter Werth ist. Z. B. — 10 ist gegen + 10 kleiner als — 1 gegen + 10. Von zwei verschiedenen entgegengesetzten Größen kommt die kleinere der größeren an Werth desto näher, je weniger ihr Unterschied beträgt; der Unterschied von — 10 und + 10 ist = 20, von — 1 und 10 aber 11, also ist in Beziehung auf positive Größen — 1 größer als — 10.

§. 142. Addiren und Subtrahiren entgegengesetzter Größen.

Wenn die zu addirenden oder subtrahirenden Größen gleiche Zeichen vor sich haben, z. B. + 3 + 5 = + 8 oder — 7 + (— 3) = — 10, so hat die Sache gar keine Schwierigkeit. Soll eine Minusgröße, d. i. eine negative Größe zugezählt oder abgezogen werden, so umgibt man sie nebst ihrem Zeichen mit einer Klammer, also: — 7 + (— 3) oder — 7 — (— 3). Wenn die erste Ziffer einer Zahlenreihe kein Zeichen vor sich stehen hat, so ist sie immer positiv (+) zu nehmen. Ueberhaupt setzt man

die erste Zahl, wenn sie positiv bedeutet, ohne Zeichen. Ueberall muß der Rechner eingedenk sein, daß + und — einander entgegengesetzt sind.

1) a.	$7 + 3 = 10$		d.	$-7 + 3 = -4$	
b.	$7 - 3 = 4$		e.	$-7 + (-3 = -10$	
c.	$7 - (-3 = 10$		f.	$-7 - (-3 = -4$	

Die Beispiele a und b sind für sich klar; c wird auf folgende Weise einleuchtend: $7 - (-3) = 7 - (0 - 3)$. Indem ich nun 0 von 7 abziehe, habe ich 3 zu viel abgezogen, da ich ja nicht 0, sondern noch 3 weniger als 0 abziehen sollte; ich muß daher 3 wieder zu 7 zählen, $7 + 3 = 10$. Man kann sich die Sache auch so denken: Setzt man vor 3 statt minus das Zeichen plus, also $7 - (+3)$, so würde sich die Berechnung so stellen:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$$

Da man bei + 3 wirklich subtrahiren muß, so wird man bei — 3 addiren müssen. Ferner: Die Summe des Restes und des Subtrahenden ist bekanntlich dem Minuend gleich; der Rest muß daher so bestimmt werden, daß er mit Subtrahend zusammen genommen dem Minuend gleich wird, oder in einer Gleichung dargestellt:

Minuend — Subtrahend — Rest

Minuend = Subtrahend + Rest, also:

7 Minuend

— 3 Subtrahend

Rest $= 7 - (-3)$

Rest $+ (-3) = 7$

Rest $- 3 = 7$

Rest $= 10$

Das Beispiel d ist von selbst einleuchtend. e, nämlich $-7 + (-3)$ heißt so viel, als 7 Thaler Schuld und 3 Thaler Schuld = 10 Thaler Schuld $= -10$. f $= 7 - (-3) = -4$, denn: $-7 + (-3) = -10$. Hier wird — 3 zu — 7 addirt. Nun steht statt $+ (-3)$, aber $-(-3)$, deshalb muß nun auch das Entgegengesetzte geschehen, die 3 muß zu — 7 addirt werden $= -4$; oder $-7 - (+3) = -10$, dann muß $-7 - (-3) = -4$ sein.

Man kann sich den Fall f auch so denken:

$$\begin{array}{r} -7 \\ 0 - 3 \\ \hline -7 + 3 = -4 \end{array}$$

Von — 7 sollte ich 0 abziehen weniger 3. Da ich aber 0 ganz abzog, so hatte ich 3 zu viel abgezogen, welche ich also wieder hinzufügen muß. Daher $-7 + 3 = -4$.

2) $12 + 4 = 16$
subtr. $3 + 3 = 6$
$9 + 1 = 10$

3) $24 - 7 = 17$
subtr. $8 + 6 = 14$
$16 - 13 = 3$
oder $24 - 7 - 8 - 6 = 3$

4) $29 + 5 = 34$
subtr. $14 - 7 = 7$
$15 + 12 = 27$
oder $29 + 5 - 14 + 7 = 27$

Beweis. Indem ich 14 abzog, hatte ich 7 zu viel abgezogen, da ich ja $14 - 7$ abziehen sollte; ich muß also 7 wieder hinzufügen.

5) $35 - 3 - 2 + 4 = 34$
subtr. $8 + 2 - 7 - 3 = 0$
$22 - 5 + 5 + 7 = 34$

Ich sollte hier $8 + 2 = 10$ abziehen, weniger 7 und weniger 3; da ich aber 8 und 2 wirklich abzog, so muß ich 7 und 3 wieder hinzufügen, also addiren.

Eine negative Größe addiren heißt, dieselbe positiv subtrahiren, und umgekehrt: eine negative Größe subtrahiren heißt, dieselbe positiv addiren.

6) $-13 + 7 - 8 = -14$
$-4 - 3 + 9 = 2$
$-9 + 10 - 17 = -16$

od. $-13 + 7 - 8 + 4 + 3 - 9$
$= -30 + 14 = -16$

Beweis. Ich kann mir denken, ich hätte $0 - 4$ sollen subtrahiren. Da ich nun 0 abzog, so nahm ich 4 zu viel weg, welche ich wieder hinzulegen muß. Eben so mit -3.

7) $9 - (-3) = 9 - 3 = 9 + 0 - 3$
$9 + 3 = 12$

8) Wie groß ist der Unterschied zwischen -7 und -5?
-7 und $+5$?
-7 und -5 sind um -2 unterschieden.
-7 und $+5 = 12$ Unterschied.

§. 143. Multipliciren mit entgegengesetzten Größen.

Beispiele. a. 2 mal $+5 = +10$
b. 2 mal $-5 = -10$
c. -2 mal $+5 = -10$
d. -2 mal $-5 = +10$

Beweise. a ist für sich verständlich.

Daß bei b 2 mal $-5 = -10$ und ebenso bei c -2 mal $+5 = -10$ ist, wird dem Schüler bald einleuchten. Der schwierigste Fall tritt aber bei d ein; -2 mal -5 soll $+10$ geben; zwei negative Faktoren sollen ein positives Produkt hervorbringen. Die Schüler werden stutzen, und der Lehrer mag sich auf einen harten Kampf gefaßt halten. Auf folgende Weise ist es mir am besten gelungen, die Schüler zu überzeugen. —

+ 2 mal — 5 = — 10, welches bereits erwiesen ist.

1) Entgegengesetzte Ursachen bringen auch entgegengesetzte Wirkungen hervor; — 2 ist das Entgegengesetzte von + 2, + . — 2 = — 10, daher muß — 5 . — 2 auch das entgegengesetzte Produkt, nämlich + 10 geben. — 2 mal 5 = — 10, das Entgegengesetzte von — 2 ist aber + 2, also wird auch das entgegengesetzte Produkt + 10 sein. Das Produkt von — 2 mal — 5 ist daher = + 10.

2) Andere Weise.

+ 2	mal	— 5	=	— 10
+ 1	„	— 5	=	— 5
+ ½	„	— 5	=	— 2½
+ ¼	„	— 5	=	— 1¼
+ ⅛	„	— 5	=	— ⅝
0	„	— 5	=	— 0
— 1	„	— 5	=	+ 5

— 5 können wir hier als 5 Thaler Schuld ansehen. Je kleiner nun der Faktor wird, je mehr er sich der Null nähert, desto kleiner wird auch das Produkt, die Schuld, die negative Größe, und desto mehr nähern wir uns dem Vermögen, der positiven Größe. Nehmen wir daher 0 zum Faktor, so wird das Produkt bis auf 0 vermindert, oder die Schuld verschwindet bis 0, d. h. ganz. Nun wollen wir einen Faktor nehmen, der jenseits der positiven Reihe 2, 1, ½, ¼, ⅛ . . . . 0 liegt, also negativ ist; 0 d. i. nichts, kann hier das Produkt nicht mehr sein, negativ aber auch nicht, weil es dann dem Produkte aus einem positiven Faktor gleich käme, folglich muß das Produkt positiv werden und — 2 mal — 5 = + 10 sein.

3) Das Multipliciren kann auch durch Addiren bewerkstelligt werden, in welchem Falle man den einen Faktor so oftmal als Summand setzt, als der andere Faktor Einheiten enthält.

+ 2 . — 5 = 0 + (— 5) + (— 5) = — 10
— 2 . + 5 = 0 — (+ 5) — (+ 5) = + 10
— 2 . — 5 = 0 — (— 5) — (— 5) = + 10

Eine negative Zahl subtrahiren heißt, wie wir vorhin gesehen, dieselbe positiv addiren. Also 0 — (— 5) — (— 5) = 0 + 5 + 5 = + 10.

4) Noch eine andere, und vielleicht die überzeugendste Darstellung:

— 5 mal — 2 = — 5 mal 0 — 2.

— 5 = 0 — 5
— 2 = 0 — 2

0 — 0
— 0 10

0 — 0 + 10

Wenn ein Faktor = 0, so ist das Produkt ebenfalls = 0, also 0 mal 0 — 5 = 0. Der andere Faktor heißt hier 2; — 2 mal 0 = 0. Daß dieses letzte Produkt subtrahirend ist, zeigt schon das Minuszeichen (—) vor 2 an. Ich sollte aber nicht — 2 mal 0 abziehen, sondern — 2 mal (0 — 5); daher ist 2 mal — 5 zu viel abgezogen worden, welches daher wieder zugezählt werden muß. Also — 2 mal — 5 = 0 + 10 = + 10; 7 — 5 soll mit 5 — 2 multiplicirt werden.

7 — 5
5 — 2

35 25
14 10

Welche Zeichen erhalten hier die einzelnen Produkte? + 7 mal + 5 ist unstreitig + 35; eben so sicher ist 5 mal — 5 = — 25. Was nun den Faktor

— 2 betrifft, so wird derselbe weder als positiv noch als negativ angesehen, 2 . 5 = 10. Der Faktor 5 — 2 zeigt aber deutlich genug an, daß dessen zweiter Theil (— 2) subtrahirend ist. Ich muß daher 2 . 7 = 14 wirklich abziehen, also — 14 bezeichnen. Doch würde dieser Abzug zu groß werden, da ich ja nicht 2 . 7 sondern 2 . 7 — 5 subtrahiren soll. Daher muß ich 2 . 5 wieder positiv zulegen, also 10 positiv setzen + 10. Das vollständige Produkt wird daher sein: + 35 — 25 — 14 + 10 = (35 + 10) — (25 + 14) = 45 — 39 = 6.

Dasselbe Resultat erhält man kurz auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r} 7 - 5 = 2 \\ 5 - 2 = 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

Anmerkung. Daß zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben müssen, hat man sogar aus der Sprache beweisen wollen. Zwei Negationen (Verneinungen) bewirken eine Affirmation (Bejahung). Z. B. Ich will den Apfel nicht nichthaben, heißt: ich will den Apfel haben; er ist nicht ungeschickt = er ist geschickt; es ist mir nicht unbekannt = ist weiß es. Etwas Aehnliches ist dies allerdings, und als solches mag man dies dem Schüler anführen; indeß stellt man doch hier zwei ganz verschiedenartige Dinge in Vergleich, und der denkende Schüler wird sich nicht befriedigt fühlen. Sind die Schüler noch nicht sehr gefördert, so vertraue der Lehrer solche und ähnliche Ergebnisse ihrem Gedächtnisse an.

§. 144. Bei zwei Faktoren gilt die Regel: Gleiche Zeichen geben ein positives und ungleiche Zeichen ein negatives Produkt, z. B. + 7 mal + 8 = + 56, und — 8 mal — 7 ebenfalls — 56. Ist überhaupt die Anzahl der negativen Faktoren gerade, so wird das Produkt positiv, ist sie aber ungerade, negativ.

$$\begin{array}{r} - 4 - 4 = + \quad 16 \\ - 4 - 4 - 4 = - \quad 64 \\ - 4 - 4 - 4 - 4 = + \quad 256 \\ - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = - \quad 1024 \end{array}$$

9) (7 — 3) 5 = 35 — 15 = 20; (9 — 13) 3 = 27 — 39 = — 12.

10)
$$\begin{array}{rr} 11 - 3 & = 8 \\ 9 - 2 & = 7 \\ \hline 99 - 27 & 56 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} - 22 + 6 \\ 99 - 49 + 6 = 56. \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{rr} 91 - 48 + 3 - 5 = & 41 \\ 5 - 3 + 2 = & 4 \\ & \hline & 164 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 455 - 240 + 15 - 25 \\ - 273 + 144 - 9 + 15 \\ 182 - 96 + 6 - 10 \\ \hline 364 - 192 + 12 - 20 \\ = 376 - 212 = 164 \end{array}$$

§. 145. Dividiren mit entgegengesetzten Größen.

Ist das Vorhergehende verstanden, so bietet das Dividiren keine besondere Schwierigkeit dar. Man hat dabei auf 4 besondere Fälle zu merken.

a. $+2 : +10 = +5$ oder $2 : 10 = 5$
b. $-2 : +10 = -5$ „ $-2 : 10 = -5$
c. $+2 : -10 = -5$ „ $2 : -10 = -5$
d. $-2 : -10 = +5$ „ $-2 : -10 = 5$

Das Beispiel a ist für sich klar. Bei b muß man den Quotienten 5 so bezeichnen, daß er mit dem negativen Divisor — 2 ein positives Produkt gibt, also — 5. Bei c muß der Quotient 5 so gewählt werden, daß er mit dem positiven Divisor 2 ein negatives Produkt hervorbringt, also — 5. Bei d verlangt der negative Dividend auch ein, aus dem Divisor und Quotienten gebildetes, negatives Produkt, daher muß der Quotient positiv genommen werden. Da das Dividiren aus den Operationen des Subtrahirens und Multiplicirens zusammengesetzt ist, so können die angeführten verschiedenen Fälle der Division leicht aus den, bei diesen beiden Rechnungsarten vorkommenden Bemerkungen erläutert werden.

§. 146. Wenn mehrere einzelne Größen zusammen gehören, und mit denselben eine und dieselbe Operation vorgenommen werden soll, so pflegt man sie mit einer Klammer (Parenthese, Einschließungszeichen) einzuschließen. In Betreff der positiven und negativen Zeichen + und — bedarf es aber dabei einiger Vorsicht, da dieselbe Größe oft das Zeichen wechselt, je nachdem sie eingeschlossen oder frei gesetzt wird. Einige Beispiele in den vier Rechnungsarten werden das richtige Verfahren am besten lehren.

a. $9 + (3 + 5) = 9 + 3 + 5 = 17$
b. $9 - (+3 + 5) = 9 - 3 - 5 = 1$
c. $9 + (3 - 5) = 9 + 3 - 5 = 7$
d. $9 - (3 - 5) = 9 - 3 + 5 = 11$
e. $9 - (-3 + 5) = 9 + 3 - 5 = 7$
f. $9 - (-3 - 5) = 9 + 3 + 5 = 17$
g. $9 + (-3 - 5) = 9 - 3 - 5 = 1$

a. Bedarf keiner Erklärung.

b. Von 9 sollen hier 3 und 5 = 8 abgezogen werden. 9 — 8 = 1.

c. Ich soll zu 9 noch 3 zählen weniger 5; 3 — 5 ist aber = — 2, also 9 — 2 = 7.

d. Von 9 sollen hier 3 abgezogen werden weniger 5; da ich aber 3 ganz abzog, so mußte ich 5 wieder hinzulegen, also 9 — 3 + 5 = 11.

e. Die Bezeichnung 9 — (+3 + 5) würde heißen, daß ich 3 + 5 = 8 von 9 abziehen sollte; die Bezeichnung bei e sagt aber, daß ich 5 — 3 = 2 von 9 abziehen soll; 9 — 2 = 7.

f. Diese Bezeichnung ist das Entgegengesetzte von b, daher muß hier 3 und 5 zu 9 gezählt werden, = 17.

. Diesseits
3 und 5 c enu .

Digitized by Google

g. ist das Entgegengesetzte von a; wenn nun $9 + (3 + 5) = 9 + 3 + 5$ ist, so muß $9 + (- 3 - 5) = 9 - 3 - 5 = 1$ sein.

Es ergibt sich hieraus, daß das Zeichen + vor der Klammer die Bezeichnung der eingeschlossenen Größen nicht ändert, daß aber das Minuszeichen — vor einer Klammer allen Größen innerhalb derselben den entgegengesetzten Werth gibt. Bei e mußte daher $3 + 5 = 8$ von 9, bei d $— (3 — 5)$ von 9 abgezogen, d. i. $— 3 + 5 = + 2$ zu 9 addirt werden. Wenn daher die eingeschlossenen Größen das Additionszeichen haben, und vor der Klammer das Minuszeichen — steht, so erhalten alle diese Größen das Minuszeichen, wenn sie frei gestellt werden, z. B. $25 — (7 + 5 + 3 + 1) = 25 — 7 — 5 — 3 — 1 = 9$.

Wenn vor der Klammer das Minuszeichen — steht und die Größen innerhalb derselben ebenfalls das Minuszeichen haben, so erhalten diese ohne Klammer das Additionszeichen +. $25 — (— 7 — 5 — 3 — 1) = 25 — 0 + 7 + 5 + 3 + 1 = 41$. $27 — (7 — 3 + 8 — 7) = 27 — 7 + 3 — 8 + 7 = 27 — 15 + 10 = 37 — 15 = 22$.

Ueberhaupt erhalten die eingeschlossenen Größen des Subtrahenden die entgegengesetzte Bezeichnung, wenn sie von der Klammer befreit werden.

a. $4 . (3 + 2) = 4 . 3 + 4 . 2 = 12 + 8 = 20$
oder $4 . (3 + 2) = 4 . 5 = 20$

b. $3 . (9 — 6) = 3 . 9 — 3 . 6 = 27 — 18 = 9$
oder $3 . (9 — 6) = 3 . 3 = 9$

c. $(2 + 3 (4 + 5) = (2+3)$ mal $(4+5) = 5 . 9 = 45$
oder $(2 + 3) . (4+5) = 5 . 9 = 45$

Man sieht hieraus, daß der Faktor vor der Klammer jede Größe innerhalb derselben multiplicirt.

a. $4 : (10 + 6) = 4 : 10 + 4 : 6 = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 4$
oder $4 : (10 + 6) = 4 : 16 = 4$

b. $(2 + 3) : 20 = 5 : 20 = 4$
$(2 + 3) : 20$ ist aber nicht $2 : 20 + 3 : 20 = 10 + 6\frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$

c. $(3 + 4 + 2) : (27 + 3 + 6) = 9 : (27 + 3 + 6) = 3 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 4$ oder $9 : 27 + 9 = 9 : 36 = 4$

d. $(7 — 3) : 32 = 4 : 32 = 8$

e. $(3 + 7 — 2) : (13 + 9 — 2 + 12) = 8 : 32 = 4$.

Es ergibt sich aus diesen Beispielen, daß die eingeschlossenen Größen des Divisors durchaus zusammengezogen werden müssen, dagegen die umklammerten Größen des Dividendus einzeln genommen, aber auch zusammengezogen werden können.

Digitized by Google

Neunzehnter Abschnitt.

§. 147. Von arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

In der ersten Abtheilung §. 1 haben wir gesehen, daß zwei Zahlen auf eine zweifache Weise, nämlich arithmetisch und geometrisch, verglichen und gemessen werden können. Bei jener wird die Einheit als Maßstab angelegt, bei dieser eine der beiden gegebenen Zahlen. Nimmt man z. B. die beiden Zahlen 3 und 9, so ergibt sich durch eine arithmetische Vergleichung, daß 9 um 6 Einheiten größer ist als 3. Diese 6 wird der Unterschied oder die Differenz genannt. Eine arithmetische Vergleichung zweier Zahlen erzeugt ein arithmetisches Verhältniß; eine geometrische Vergleichung gibt ein geometrisches Verhältniß. Bei jenem fragt man nach dem Unterschiede, bei diesem nach dem Quotient. Jenes arithmetische Verhältniß hätte man auch so darstellen können: 3 zu 3 + 6. Dadurch werden folgende Sätze leicht begreiflich:

a. Zählt man den Unterschied zu dem kleineren Gliede, so hat man das größere Glied. 3 + 6 = 9.

b. Zieht man den Unterschied von dem größeren Gliede ab, so erhält man das kleinere Glied. 9 — 6 = 3.

c. Zieht man das kleinere Glied vom größeren ab, so bekommt man den Unterschied oder die Differenz. 9 — 3 = 6.

Weil man, um die Differenz der beiden Glieder zu erfahren, subtrahiren muß, so hat man zur Bezeichnung eines arithmetischen Verhältnisses das Subtraktionszeichen gewählt. 3 — 9 bezeichnet das arithmetische Verhältniß der beiden Zahlen 3 und 9.

§. 148. Sowol beim arithmetischen als bei einem geometrischen Verhältniß werden die beiden zusammengestellten Zahlen Verhältnißglieder oder schlechthin Glieder genannt. Das Glied zur Linken heißt Vorderglied, zur Rechten Hinterglied, der Unterschied beider Glieder wird auch wol Name genannt. Ist das Vorderglied kleiner als das Hinterglied, so ist das Verhältniß ein steigendes oder zunehmendes; ist es aber größer, so nennt man das Verhältniß ein fallendes oder abnehmendes. Sind beide Glieder gleich, so hat man ein Verhältniß der Gleichheit; sind sie ungleich, ein Verhältniß der Ungleichheit.

5 — 7 ein steigendes arithmetisches Verhältniß
7 — 5 „ fallendes „ „
6 — 6 „ Verhältniß der Gleichheit
6 — 7 „ „ „ Ungleichheit.

Die Differenz ist jedesmal = dem Hintergliede — dem Vordergliede, z. B. 5 — 7. Hier ist die Differenz 7 — 5 = 2; ferner 7 — 5; die Differenz ist hier 5 — 7 = — 2. Bei einem steigenden Verhältnisse ist die Differenz positiv, bei einem fallenden negativ, bei einem Gleichheitsverhältnisse = 0.

Digitized by Google

§. 149. Zwei arithmetische Verhältnisse von gleicher Art, d. i. beide zunehmend oder beide abnehmend, sind einander gleich, wenn sie gleiche Unterschiede haben. 3 — 5 ist gleich 7 — 9; in beiden Verhältnissen ist die Differenz 2; $^1/_4$ zu $^1/_2$ ist gleich $^1/_3$ zu $^7/_{12}$, denn in beiden ist die Differenz $= {}^1/_4$.

1. Anmerkung. Wenn die Schüler noch wenig gefördert sind, so nehme der Lehrer die Uebungen vor, welche §. 5 und 6 mit den geometrischen Verhältnissen sind vorgenommen worden. Statt Exponent nehme er hier Differenz, statt des Multiplicirens wird hier das Addiren und statt des Dividirens das Subtrahiren angewendet.

2. Anmerkung. In einigen arithm. Lehrbüchern wird gelehrt, daß man die beiden Zahlen eines geometrischen Verhältnisses lesen müsse: „verhält sich," bei einem arithm. Verhältnisse aber: „unterscheidet sich." 3 : 9 heißt: 3 verhält sich zu 9; aber 3 — 9 wird demnach gelesen: 3 unterscheidet sich von 9. Sollte es nicht besser sein, bei einem geometrischen Verhältnisse schlechthin zu sagen: „verhält sich" und bei einem arithmetischen Verhältnisse: „verhält sich arithmetisch?"

§. 150. Wenn man beiden Gliedern eines arithmetischen Verhältnisses Gleiches zuzählt oder von beiden Gleiches abzählt, so bleibt das Verhältniß unverändert.

5	— 8,	Differenz 3
1	1	addirt
6	— 9,	Differenz 3
2	2	subtr.
4	— 7	ebenfalls Differenz 3

Multiplicirt oder dividirt man beide Glieder mit gleicher Zahl, so erhält man ein anderes arithmetisches Verhältniß, und zwar erleidet in diesem Falle die Differenz gleiche Veränderung wie die Glieder.

	4	— 6	Differ. 2
Multipl.	3	3	
	12	— 18	Differ. 6 $= 3 \cdot 2$
Divid. durch 2 :	6	— 9	Differ. 3 $= {}^6/_2$.

§. 151. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine arithmetische Proportion*). $\overset{a}{5} - \overset{b}{7} = \overset{c}{11} - \overset{d}{13}$ oder $\overset{a}{7} - \overset{b}{3} = \overset{c}{9} - \overset{d}{5}$. Die Glieder a und d werden äußere, b und

*) Der Ausdruck arithmetische Gleichung ist nicht gleichbedeutend mit arithmetischer Proportion. Eine Gleichung besteht aus zwei verschiedenen Ausdrücken für einen und denselben Werth. Z. B.

3 und 9 = 7 und 5.
= 12 = 12.

Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden jedesmal eine arithmetische Gleichung, aber diese bildet nicht nothwendig eine arithmetische Proportion, weil bei einer Gleichung die Stellung der Glieder auf einer Seite willkürlich, bei einer Proportion aber nothwendig ein und dieselbe ist. Der Folge wegen mache aber der Lehrer seine Schüler mit der Behandlung einer Gleichung bekannt. Er zeige ihnen, daß eine Gleichung als solche unverändert bleibt, wenn auf beiden Seiten gleiche Veränderung vorgenommen wird. Man darf also auf beiden Seiten Gleiches zuzählen oder abzählen, mit gleichen Zahlen multipliciren oder dividiren, überhaupt auf gleiche Weise Größen wegschaffen oder zusetzen. Eine negative Größe wird weggeschafft durch Addiren

c innere genannt; a und c sind Vorderglieder, b und d Hinterglieder der Proportion. So wie man das größere Glied durch das kleinere + der Differenz darstellen kann, so kann auch eine arithmetische Proportion auf diese Weise dargestellt werden. $5 - 7 = 11 - 13$ ist: $5 - (5 + 2) = 11 - (11 + 2)$. Eben so kann man das kleinere Glied durch das größere — der Differenz darstellen $(7 - 2) - 7 = (13 - 2) - 13$. Sind die beiden mittleren Glieder gleich, so heißt die Proportion eine stetige, z. B. $3 - 7 = 7 - 11$.

§. 152. In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußern Glieder gleich der Summe der beiden innern Glieder.

$$\underbrace{4 - \overbrace{7 = 2}^{9} - 5}_{9}$$

Man kann diese Proportion, wie vorhin bemerkt, auch so darstellen:

$$\underbrace{4 - \overbrace{(4 + 3)}^{4+3+2} = 2 - (2 + 3)}_{4+3+2}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } 4 + (2 + 3) &= (4 + 3) + 2 \\ = 4 + 2 + 3 &= 4 + 3 + 2 \\ = \quad 9 &= 9 \end{aligned}$$

Anmerkung. Durch die Buchstabenrechnung allgemein dargestellt. Das erste Glied sei a, die Differenz d, das dritte Glied b, so hat man:

$$\underbrace{a - \overbrace{(a + d) = b}^{} - (b + d)}$$

$$\begin{aligned} a + (b + d) &= b + (b + d) \\ = a + b + d &= a + b + d \end{aligned}$$

oder besser, da die Proportion auch abnehmend sein kann:

$$a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$$

$$a + (b \pm d) = b + (a \pm d)$$

§. 153. In einer steigenden arithmetischen Proportion ist die halbe Summe der äußeren Glieder, jedem der beiden mittleren Glieder gleich.

---

derselben Größe, eine summirende oder additive Größe durch Subtrahiren, ein Faktor durch Dividiren, ein Divisor durch Multipliciren. Beispiel.

a. $7 + 3 = 6 + 4$ subtr. 3.
$7 = 3 + 4$

b. $6 - 2 = 9 - 6$ addire 2
$5 = 9 - 4$

c. $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ divid. d. 3.
$8 = \frac{4 \cdot 6}{3}$
$8 = \frac{24}{3}$
$8 = 8$

d. $\frac{18}{3} = 2 + 4$ mult. mit 3.
$18 = 6 + 12$
$18 = 18$

Digitized by Google

$5 - 9 = 9 - 13$; $\frac{5 + 13}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Wenn man daher die Summe der äußern Glieder einer arith. Proportion halbirt, so erhält man das mittlere Glied einer ſtetigen Proportion. Dieſes mittlere Glied wird auch die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zu den beiden äußern Gliedern genannt. Daher iſt die halbe Summe zweier Zahlen die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zu dieſen beiden Zahlen, und es läßt ſich vermittelſt dieſer und den beiden gegebenen Zahlen jedesmal eine ſtetige arithmetiſche Proportion bilden. Die gegebenen Zahlen ſind alsdann die beiden äußern Glieder und die gefundene Zahl die beiden mittleren.

$5 + 9 = 14$; $^{14}/_{2} = 7$; $5 - 7 = 7 - 9$
$17 + 9 = 26$; $^{26}/_{2} = 13$; $17 - 13 = 13 - 9$

Aus zwei Paar Zahlen, deren Summen gleich ſind, kann eine arithmetiſche Proportion gebildet werden, indem man das eine Paar zu äußern und das andere Paar zu innern Gliedern macht. $9 + 7 = 16$; $12 + 4 = 16$; $9 - 12 = 4 - 7$ oder $7 - 12 = 4 - 9$ oder $9 - 4 = 12 - 7$ oder $7 - 4 = 12 - 9$, oder $4 - 7 = 9 - 12$ oder $4 - 9 = 7 - 12$ oder $12 - 7 = 9 - 4$ oder $12 - 9 = 7 - 4$.

1) Aufg. Suchet die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen $^{3}/_{4}$ und $^{5}/_{6}$ $(= {}^{19}/_{24})$; 0 und 1 $(= {}^{1}/_{2})$ — 1 und + 3, $= +1$, denn $-1 + 3 = 2$, $^{2}/_{2} = 1$ und $-1 - (+1) = +1 - (+3)$, die Proportion hieraus heißt $-1 - (+1) = 1 - (+3)$, die Summe der äußern Glieder iſt $-1 + 3 = +2$ und der innern Glieder $1 + 1 = 2$.

§. 154. Im gemeinen Leben wird von dieſer mittleren arithmetiſchen Proportionalzahl Gebrauch gemacht, wenn man den Mittelpreis zweier verſchiedenen Sorten oder Preiſe einer Waare wiſſen will; z. B. ich habe 2 Pfund Kaffee gekauft, 1 Pfund zu 9 und 1 Pfund zu 13 Sgr., wie viel koſtet jedes Pfund im Durchſchnitt? $9 + 13 = 22$; $^{22}/_{2} = 11$, jedes Pfund koſtet im Durchſchnitt 11 Sgr.

Sind mehr als zwei Sorten gegeben, ſo findet man den Durchſchnittspreis oder den Mittelpreis oder beſſer das arithmetiſche Mittel, wenn man die Sorten und eben ſo die gegebenen Preiſe addirt, und die Summe der letztern durch die Summe der erſtern dividirt.

2) Ein Landmann hatte ausgeſäet

im 1ſten Jahre	10	Scheffel,	geerntet	90	Scheffel
„ 2 „	„	9	„ ,	„	87	„
„ 3 „	„	12	„ ,	„	132	„
„ 4 „	„	11	„ ,	„	121	„
		42 Sch. Ausſaat für 4 Jahre.			430 Sch = Ernte von 4 Jahren.	

a. Wie viel Scheffel hatte er im Durchſchnitt von jedem Scheffel Ausſaat? b. Wie viel erntete er jährlich im Durchſchnitt?

$42 : 430 = 15^{5}/_{21}$ oder 10,24 Scheffel = a
$4 : 430 = 107^{1}/_{2}$ oder 107,5 „ = b

Anmerkung. Genau genommen ist der Durchschnittspreis vom Mittelpreis unterschieden. Jenen erhält man, wenn man mit der Summe der verschiedenen Quantitäten in die Summe der verschiedenen Preise dividirt, diesen erhält man, wenn man von jeder Sorte gleiche Quantität nimmt, die Preise davon addirt und diese Summe mit der Summe der gleichen Quantitäten dividirt.

Beispiel. Es wurden gekauft:

2 Pfund Kaffee, das Pfund zu	10 Sgr.	20 Sgr.
3 " " , " "	12 "	36 "
5 " " , " "	13 "	65 "
10 Pfund	35 Sgr.	121 Sgr.

a. Wie viel kostet jedes Pfund im Durchschnitt?

$10 : 121 = 12^1/_{10}$ im Durchschnitt.

b. Welches ist der Mittelpreis der verschiedenen Sorten?

1 Pfund zu 10 Sgr.
1 " " 12 "
1 " " 13 "

3 Pfund 35 Sgr. $= 11^2/_3$ Sgr. der Mittelpreis.

§. 155. Da das zweite Glied eines arithmetischen Verhältnisses jedesmal durch das erste Glied und die Differenz bestimmt wird, so daß bei einem zunehmenden Verhältniß das zweite Glied aus der Summe des ersten Gliedes und der Differenz und bei einem abnehmenden Verhältniß aus dem Unterschiede des ersten Gliedes und der Differenz besteht: so läßt sich daraus leicht entnehmen, wie zu drei gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das vierte gefunden wird. Ist diese nämlich zunehmend, so addire man zum dritten Gliede die Differenz des ersten und zweiten Gliedes; ist sie aber abnehmend, so subtrahire man vom dritten Gliede diese Differenz.

$$3 - 10 = 5 : x.$$

Die Proportion ist zunehmend; die Differenz des ersten und zweiten Gliedes ist 7, das vierte Glied ist daher $5 + 7 = 12$.

$$10 - 3 = 12 : x.$$

Die Proportion ist abnehmend; die Differenz des ersten und zweiten Gliedes ist 7, das vierte Glied ist daher $12 - 7 = 5$.

Da wir hier Bekanntschaft mit den negativen Größen voraussetzen dürfen, so können wir zur Bestimmung des 4. Gliedes die allgemeine Regel geben: Das 4. Glied einer arithmetischen Proportion = der Summe des 3. Gliedes und der Differenz. Letztere ist dann jedesmal gleich dem Hintergliede weniger dem Vordergliede, bei einer abnehmenden Progression also negativ.

Da die Summe der beiden äußern Glieder eben so groß ist, als die Summe der beiden innern Glieder, so läßt sich das unbekannte vierte Glied noch auf eine andere Weise ausmitteln. Man addirt nämlich die beiden mittleren Glieder, und subtrahirt von dieser Summe das erste Glied, so gibt der Rest das vierte Glied.

a. $3 - 10 = 5 : x$

$10 + 5 - 3 = 12 = x$

b. $10 - 3 = 12 - x$

$3 + 12 - 10 = 5 = x$

Allgemein dargestellt:

a. $a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$

§. 156.

a.	9 — 16 = 12 — 19	Differenz	7	addirt.
	4 — 7 = 5 — 8	„	3	
b.	13 — 23 = 17 — 27	„	10	subtrahirt.
	3 — 5 = 4 — 6	„	2	
	10 — 18 = 13 — 21	„	8	

Ferner:

c. $5 - 16 = 6 - 17$ oder $5 - 16 = 6 - 17$

$4 \quad 4 \qquad\qquad\qquad\qquad 4 \quad 4$

$9 - 20 = 6 - 17 \qquad\qquad 5 - 16 = 10 - 21$

d. $6 \quad 6$ oder $6 \quad 6$

$3 - 14 = 6 - 17 \qquad\qquad 5 - 16 = 4 - 15$

e. $7 - \quad 7$

$10 - 14 = 13 - 17$

f. $3 \quad 3$

$7 - 14 = 10 - 17$

g. $3 \quad 3$

$7 - 17 = 10 - 20$

h. $4 \quad 4$

$7 - 13 = 10 - 16$

Aus diesen Beispielen ergibt sich Folgendes:

Für a und b. Wenn man die gleichliegenden Glieder zweier arithmetischen Proportionen zusammenzählt oder von einander abzieht, so erhält man eine neue arithmetische Proportion, deren Differenz gleich ist der Summe der Differenzen von den beiden gegebenen Proportionen.

Für c und d. Wenn man in einer arithmetischen Proportion zu den beiden Gliedern eines Verhältnisses Gleiches zuzählt oder von denselben Gleiches abzieht, so erhält man eine, der gegebenen gleiche Proportion.

Für e, f, g, h. Wenn man zu den gleichliegenden (homologen) Gliedern, d. h. zu den beiden Vordergliedern oder Hintergliedern einer arithm. Proportion, Gleiches zuzählt oder davon abzieht, so ergibt sich eine neue, von der gegebenen aber unterschiedene Proportion.

Anmerkung. Der Schüler muß aus dem Gegebenen den Lehrsatz selbst bilden; also erst das Gegebene, dann den Lehrsatz, erst das Besondere, dann das Allgemeine. Die Resultate soll der Schüler selbst machen; der Lehrer hat nur für gehaltreiche Daten zu sorgen. „Wer Dir das Facit sagt, dem wirf die Rechnung an den Kopf" schreibt irgendwo ein deutscher Schriftsteller. Ein kräftiger Wink für den Lehrer!

Man vergleiche Seite 82 und 97 die beiden Anmerkungen.)

§. 157. Aus 4 Zahlen, welche unter sich arithmetisch proportionirt sind, lassen sich 8 arithmetische Proportionen bilden. Beispiel. 6, 11, 10, 15.

6 — 11 = 10 — 15
6 — 10 = 11 — 15
11 — 6 = 15 — 10
11 — 15 = 6 — 10
10 — 15 = 6 — 11
10 — 6 = 15 — 11
15 — 10 = 11 — 6
15 — 11 = 10 — 6

Anmerkung. Um nicht zu weitläufig zu werden, muß ich hier auf den ersten, zweiten und dritten Abschnitt dieses 2. Bandes verweisen. Der Lehrer wird, so weit es das Bedürfniß seiner Schüler erheischt, die dort angeführten Bemerkungen über die geom. Proportionen leicht für diesen Abschnitt benutzen können.

Zwanzigster Abschnitt.

§. 158. Von den Reihen oder Progressionen.

Eine Reihe Zahlen, welche nach einem und demselben Gesetze zu- oder abnehmen, heißt eine Zahlenreihe oder Progression. a) 1, 2, 3, 4, 5 oder b) 1, 3, 5, 7, 9 oder c) 9, 8, 7, 6 oder d) 11, 8, 5, 2; ferner e) 1, 2, 4, 8, 16 oder f) 36, 12, 4, $1\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$ u. s. w. sind Zahlenreihen. Wird eine solche Zahlenreihe durch die Addition — wie bei a und b — oder durch die Subtraktion — wie bei c und d gebildet, so heißt sie eine arithmetische Progression; wird sie aber durch die Multiplication, wie bei e, oder durch die Division — wie bei f — gebildet, so nennt man sie eine geometrische Reihe oder eine geometrische Progression.

§. 159. Von den arithmetischen Reihen, oder von den arithmetischen Progressionen.

Bei einer arithmetischen Reihe, z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. haben wir zuerst Folgendes zu merken: Jede Zahl in der Reihe heißt ein Glied; die Zahl, um welche zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder verschieden sind, wird Unterschied genannt. Das Glied, welches links zuerst steht, heißt das erste Glied; das äußerste Glied rechts aber das letzte Glied. Durch das erste Glied und die Differenz wird die ganze arithmetische Reihe bestimmt. Wird die Differenz dem ersten Gliede zugezählt, so wird dadurch eine zunehmende oder wachsende Proportion bestimmt. Das erste Glied sei 1 und die Differenz 3, so ist das 2te Glied 4 und damit sind nun auch alle folgende Glieder bestimmt, nämlich 1, 4, 7, 10, 13 u. s. w., subtrahirt man aber die Differenz von dem ersten Gliede, so wird die ganze Progression eine fallende oder abnehmende. Setzt man eine fallende arithmetische Reihe fort, bis jenseits 0, so werden die Glieder negativ. Z. B. 9, 6, 3, 0, — 3, — 6, — 9 u. s. w. oder

Digitized by Google

9, 7, 5, 3, 1 — 1, — 3, 5 7 — 9. Eine wachsende arithmetische Reihe kann bis ins Unendliche zunehmen und eine abnehmende Reihe bis ins Unendliche abnehmen.

§. 160.

a. Zahl der Glieder	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b. Arithm. Progression	1	4	7	10	13	16	19	22	25
c. Differenzen		3	3	3	3	3	3	3	
d. Anzahl der Differ.		1	2	3	4	5	6	7	8

e. Zahl der Glieder	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f. Arithm. Progr.	39	35	31	27	23	19	16	11	7	3	— 1
g. Differenzen		4	4	4	4	4	4	4	4	4	
h. Anzahl der Differ.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Die Reihen b und f können auch auf folgende Weise dargestellt werden:

a.	1	2	3	4	5	6	7
b.	$1, 1+1.3, 1+2.3, 1+3.3.$		$1+4.3, 1+5.3, 1+6.3$				
e.	1	2	3	4	5	6	
f.	$39, 39-1.4, 39-2.4, 39-3.4, 39-4.4, 39-5.4$						

Bei einer aufmerksamen Ansicht ergibt sich nun Folgendes:

1) In der Reihe b ist die Anzahl der Glieder 9, die Anzahl der Differenzen 8, mithin um 1 weniger als jene. Dieß hat seinen Grund darin, daß das erste Glied ohne Differenz ist. Mit der Anzahl der Glieder ist daher auch die Anzahl der Differenzen gegeben und umgekehrt: durch die Anzahl der Differenzen wird auch die Anzahl der Glieder bestimmt.

2) Bei einer zunehmenden Progression besteht jedes Glied aus der Summe des ersten Gliedes und der Summe der Differenzen, welche diesem Gliede vorher gehen. Z. B. In der Reihe b besteht das zweite Glied aus $1 + 1 . 3$, das dritte Glied aus $1 + 2 . 3$. In einer abnehmenden arithmetischen Reihe ist jedes Glied gleich dem ersten Gliede, weniger der Summe der Differenzen, welche diesem Gliede vorher gehen. Z. B. In der Reihe f ist das zweite Glied $= 39 - 4$ oder $1 . 4$, das dritte Glied $= 39 - (4 + 4$ oder $2 . 4)$, das fünfte Glied $= 39 - 4 + 4 + 4 + 4$ oder kürzer $= 39 = 4 . 4$. Das erste Glied sei 64, die Differenz sei 4, so ist das 10. Glied a. bei einer zunehmenden Reihe $64 + 9 . 4 = 100$, b. bei einer abnehmenden $= 64 - 9 . 4 = 28$. — Da aber mit der Anzahl der Glieder auch die Anzahl der Differenzen bekannt ist, und diese, wie wir gesehen haben, immer 1 weniger als jene beträgt, so können wir zur Bestimmung jedes beliebigen Gliedes die bestimmtere Regel geben, a für eine zunehmende arithmetische Reihe: Man multiplicire die Differenz mit der Anzahl der Differenzen, und subtrahire dieses Produkt vom ersten Gliede. Ist also das erste Glied und die Differenz bekannt, so läßt sich darnach jedes beliebige Glied in der Reihe bestimmen.

Digitized by Google

3) Ist das letzte Glied, die Anzahl der Glieder und die Differenz bekannt, so läßt sich daraus das erste Glied bestimmen. Da das letzte Glied einer zunehmenden Reihe aus dem ersten Gliede und der Summe der Differenzen besteht, so braucht man, um das erste Glied zu erhalten, nur die letztere Summe von dem letzten Gliede abzuziehen. Beispiel. Die Anzahl der Glieder sei = 15, das letzte Glied = 43 und die Differenz 3, so ist das erste Glied $43 - 14 \cdot 3 = 43 - 42 = 1$. Ist die arithmetische Reihe abnehmend, so zählt man die Summe der Differenzen zum letzten Gliede. Das letzte Glied sei 28, die Differenz 4, die Anzahl der Glieder 10, so ist das erste Glied $28 + 9 \cdot 4 = 64$ das erste Glied.

4) Ist das erste und letzte Glied nebst der Anzahl der Glieder gegeben, so läßt sich die Progression auf folgende Weise bestimmen. Der Unterschied des ersten und letzten Gliedes ist gleich der Summe der Differenzen. Dividirt man in diese Summe mit der Anzahl der Glieder weniger 1, so erhält man die Differenz. Ist die Reihe zunehmend, so wird sie durch Hinzufügung der Differenz zu jedem neuen Gliede bestimmt; ist sie abnehmend, so bildet sich jedes neue Glied durch das Subtrahiren der Differenz von dem unmittelbar vorhergehenden Gliede. Beispiel. Das erste Glied sei = 1, das letzte = 52 und die Anzahl der Glieder = 18. Die Summe der Differenzen ist daher 52 — 1 = 51. Da die Anzahl der Glieder = 18 ist, so wird die Anzahl der Differenzen sein 18 — 1 = 17; $^{51}/_{17} = 3$, die Differenz. Die Progression ist zunehmend, und heißt daher: 1, 4, 7, 10 . . . . 52. Das erste Glied sei 52, das letzte Glied = 1, die Anzahl der Glieder = 18, so haben wir 52 — 1 = 51 als die Summe der Differenzen. Die Anzahl der Differenzen ist 18 — 1 = 17, daher die Differenz $^{51}/_{17} = 3$, die Reihe ist abnehmend, und heißt 52, 49, 47 . . . . . 1.

a. Die Differenz zu finden: Man subtrahire zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder. 1, 3, 5, 7 . . . . sei die arithm. Reihe, so ist 3 — 1 oder 5 — 3 = 2 die Differenz.

b. Die Anzahl der Differenzen, die Differenz und das erste Glied sind bekannt, das letzte Glied soll daraus bestimmt werden. Die Progression sei zunehmend: Man multiplicire die Anzahl der Differenzen mit der Differenz und addire dazu das erste Glied. Beispiel. Das erste Glied sei = 4, die Differenz 5, die Anzahl der Differenzen = 12, so ist das letzte Glied = 12 . 5 + 4 = 64.

2) Die Progression sei abnehmend: Man subtrahire das Produkt aus der Anzahl der Differenzen und der Differenz vom ersten Gliede. Beispiel. Das erste Glied sei $7^1/_2$, die Differenz = $^1/_2$, die Anzahl der Glieder = 11, so ist das letzte Glied: $7^1/_2 - (^1/_2 \cdot 10) = 7^1/_2 - 5 = 2^1/_2$.

Anmerkung. Mit der Anzahl der Glieder ist auch die Anzahl der Differenzen gegeben. Für den Ziffernrechner werden die Regeln zur Auffindung eines unbekannten Stücks einer arithmetischen Reihe einfacher und verständlicher, wenn die Anzahl der Differenzen mit unter die Bestimmungen aufgenommen wird. Wird die obige Regel b nach der Anzahl der Glieder bestimmt, so muß sie heißen: Man multiplicire die Differenz mit der Anzahl der

Glieder weniger 1, und addire dazu das erste Glied. Also: Die Differenz sei 5. Anzahl der Glieder = 13; 13 — 1 = 12 die Anzahl der Differenzen, 12 . 5 + 4 = 64. Weniger verständlich als oben. — Da man immer darauf bedacht sein muß, die Anzahl der Zeichen, so viel es angeht, zu beschränken, so würde es für die Buchstabenrechnung nicht rathsam sein, die Anzahl der Differenzen noch besonders zu bezeichnen. Wird die Anzahl der Glieder = n gesetzt, so ist die Anzahl der Differenzen = n — 1.

c. Das letzte Glied, die Anzahl der Differenzen und die Differenz sind gegeben, das erste Glied wird gesucht. 1) Zunehmende Reihe: Man multiplicire die Anzahl der Differenzen mit der Differenz und subtrahire das Produkt vom letzten Gliede. Beispiel. Das letzte Glied sei = 64, die Anzahl der Differenzen = 12, die Differenz = 5, so ist das erste Glied = 64 — 12 . 5 = 4. — 2) Abnehmende Reihe: Man addire das Produkt aus der Anzahl der Differenzen und der Differenz zum letzten Gliede. Das letzte Glied sei 4, die Anzahl der Differenzen 12, die Differenz 5, so ist das erste Glied: 4 + 5 . 12 = 64.

d. Das erste und letzte Glied und die Anzahl der Differenzen sind gegeben, die Differenz wird gesucht. Man dividire den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Anzahl der Differenzen. Beispiel. Das erste Glied sei = 4, das letzte = 64, die Anzahl der Differenzen 12, so ist die Differenz = $\frac{64-4}{12} = 5$.

e. Das erste und letzte Glied und die Differenz sind gegeben, die Anzahl der Glieder wird gesucht. Man dividire den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Differenz, und addire zu diesem Quotienten 1. Das letzte Glied sei 64, das erste Glied 4, die Differenz 5, so ist die Anzahl der Glieder $\frac{64-4}{5} + 1 = \frac{60}{5} + 1 = 12\ 1 = 13$.

Anmerkung. Da die Anzahl der Glieder und die Anzahl der Differenzen immer um 1 verschieden sind, so bedarf es zur Auffindung dieser beiden Stücke nur einer einzigen Regel. Setzt man die Anzahl der Glieder = n, so ist die Anzahl der Differenzen = n — 1; wird die Anzahl der Differenzen = n angenommen, so ist die Anzahl der Glieder n + 1.

§. 161. Es sei die arithmetische Progression folgende:

a	b	c	d	e	f	g	h
1	4	7	10	13	16	19	22

so ist die Summe der Glieder:

a und h oder 1 + 22 = 23
c und g „ 4 + 19 = 23
d und f „ 7 + 16 = 23
b und e „ 10 + 13 = 23

Die Anzahl der Glieder ist hier 8, eine gerade Zahl. Nehmen wir g für das erste Glied, so ist die Anzahl der Glieder 7, eine ungerade Zahl. In diesem Falle ist die Summe der Glieder:

a und g oder 1 + 19 = 20
b und f „ 4 + 16 = 20
c und e „ 7 + 13 = 20
d und d „ 10 + 10 = 20

d. h.: In einer arithmetischen Progression ist die Summe des ersten und letzten Gliedes, des zweiten und vorletzten, des dritten vom Anfange und des dritten vom Ende, überhaupt die Summen je zweier Glieder, von welchen das eine so weit vom Anfange als das andere vom Ende absteht, einander gleich. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist das doppelte mittlere Glied der Summe jedes dieser, so bestimmten Gliederpaare gleich.

§. 162. Folgende Darstellung obiger Progression wird das Gesagte leicht begreiflich machen:

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ 1, & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 \end{array}$$
$$= 1, 1+1.3, 1+2.3, 1+3.3, 1+4.3, 1+5.3, 1+6.3.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} a+g &= 1+19 = 1+(1+6.3) = 2+6.3 = 20 \\ b+f &= 4+16 = 1+1.3+(1+5.3) = 2+6.3 = 20 \\ c+e &= 7+13 = 1+2.3+(1+4.3) = 2+6.3 = 20 \\ d+d &= 10+10 = 1+3.3+(1+3.3) = 2+6.3 = 20 \end{aligned}$$

Es ergeben sich auf diese Weise $3\frac{1}{2}$ Paar Glieder, von welchen die Summe jedes Paares $= 20$ ist. Das mittlere Glied d ist $\frac{1}{2}$ Paar $= 10$, doppelt genommen ebenfalls 20. Wollte man nun die Summe aller Glieder der Progression wissen, so brauchte man nur $3\frac{1}{2}$ mal 20 zu nehmen $= 70$. Daraus geht zur Auffindung der Summe einer arithmetischen Progression folgende Regel hervor:

Man addire das erste und letzte Glied, und multiplicire diese Summe mit der Anzahl der Gliederpaare; oder: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl aller Glieder.

Noch deutlicher ergibt sich dieß, wenn man eine arithmetische Reihe doppelt unter einander schreibt, einmal als abnehmend, das zweitemal als zuehmend, und dann die Glieder addirt.

$$\begin{array}{r} 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 \\ 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 \\ \hline 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20 \end{array}$$

Es ergeben sich hier immer gleiche Summen, und zwar so viele, als die Anzahl der Glieder beträgt, hier 7 mal 20. Multiplicirt man daher eine dieser Summen mit der Anzahl der Glieder, so erhält man die Summe dieser Summen. Diese ist aber das Doppelte der gegebenen arithmetischen Reihe, welche man also durch 2 dividiren muß, um die einfache richtige Summe zu erhalten. Daher kann man auch obige Regel so ausdrücken: Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl aller Glieder, und dividire dieses Produkt durch 2.

Anmerkung. Dürfte man Bekanntschaft mit der Buchstabenrechnung voraussetzen, so könnte der Lehrer diese Regel zugleich durch eine Formel ausdrücken. Z. B. Das erste Glied sei a, die Differenz d, die Anzahl der Differenzen n, so ist das letzte Glied $= a + a + dn = 2a + dn$ oder, da man gewöhnlich die Anzahl der Glieder $= n$, mithin die Anzahl der Differenzen $= n - 1$ setzt, so wäre das letzte Glied $= a + a + d(n-1) = 2a + d$

$(n - 1)$ und die Summe der Progression $= (2a + d(n - 1))\ ^1/_2\ n$ oder $\frac{(2a + d(n - 1))\ n.}{2}$ Nennt man das letzte Glied z, so haben wir die kürzere Formel: $(a + z)\ ^1/_2\ n$ oder $\frac{(a + z)\ n.}{2}$ Wird die Summe $= s$ gesetzt, so hat man $s = \frac{(a + z)\ n.}{2}$

Der Gebrauch oder Nichtgebrauch hievon, so wie die bekannten Folgerungen daraus zur Auffindung jedes Stücks der Progression muß der Einsicht des Lehrers überlassen bleiben.

§. 163. Bei einer arithmetischen Progression kommen nun folgende 5 Stücke vor:

1) das erste Glied,
2) das letzte Glied,
3) die Differenz oder der Unterschied,
4) die Anzahl der Glieder oder auch der Differenzen,
5) die Summe aller Glieder,

von welchen 5 Stücken jedes gefunden werden kann, wenn die übrigen oder wenigstens drei der übrigen gegeben sind. Es sollen nun darüber einige praktische Beispiele folgen.

1) Herr N miethete einen Knecht, welchem er, außer Kost und Wohnung, einen, auf folgende Weise bestimmten Jahrlohn gab: in der ersten Woche erhielt der Knecht 1 Sgr., in der zweiten 2 Sgr., in der dritten 3 Sgr. und so fort für jede folgende Woche einen Sgr. mehr. Wie groß war der Jahrlohn des Knechtes?

Auflösung. Die Aufgabe enthält eine arithmetische Reihe mit folgenden Bestimmungen:

Das erste Glied ist 1
Die Anzahl der Glieder ist 52
Die Differenz = 1

Die Summe wird gesucht. Bevor diese gefunden werden kann, muß vorher das letzte Glied bekannt sein. Das letzte Glied ist aber $= 1 + 51. = 1 + 51 = 52$ (S. §. 160).

Die Summe ist also $= \frac{(1 + 52)\ 52}{2} = 1478$ Sgr. $= 45$ Thl. 28 Sgr.

2) Ein Vater hatte bei der Geburt von jedem seiner 6 Kinder im ersten Jahre 1 Thl., im zweiten Jahre 3 Thl. und so fort bis zum vollendeten 25sten Jahre jedes Jahr 2 Thl. mehr in eine Sparkasse gelegt; a) wie viel erhielt jedes Kind nach 25 Jahren? b) wie viel erhielten alle 6?

Auflösung. Erstes Glied = 1
Differenz = 2
Anzahl der Glieder = 25

Zuerst wird das letzte Glied gesucht. $1 + 24 . 2 = 49$, letztes Glied.
$(1 + 49)\ 12^1/_2 = 625$ Thl. = a
$6 . 625 = 3750$ " = b

3) Die Physik lehrt über den Fall der Körper in einem luftleeren Raume Folgendes:

In der ersten Sekunde fällt er ungefähr 1 . 15 Fuß
„ „ zweiten „ „ „ „ 3 . 15 „
„ „ dritten „ „ „ „ 5 . 15 „

so daß sich die Räume, welche ein Körper in mehreren Sekunden durchfällt, wie die ungeraden Zahlen verhalten. In der ersten Sekunde fällt er also durch einen Raum von 15 Fuß, in der zweiten durch 45, in der dritten durch 75 Fuß u. s. w. Da diese Fallräume immer um 30 Fuß zunehmen, so bilden sie eine arithmetische Reihe; wie tief wird demnach ein Körper in der 60sten Sekunde fallen? Hier muß nun zuerst die 60ste ungerade Zahl ausgemittelt werden. Um diese zu finden, merke man Folgendes:

§. 164. Wenn man die erste ungerade Zahl 1 nennt, so ist die zweite 3, also 1 größer als die Ordnungszahl, durch welche sie bezeichnet wird; die dritte ungerade Zahl ist 5, also 2 größer als die sie bezeichnende Ordnungszahl; die vierte ungerade Zahl ist 7, also 3 größer u. s. w. Die Reihe ungerader Zahlen bildet eine arithmetische Reihe mit der Differenz 2; die Ordnungszahlen können hier als die Anzahl der Glieder angesehen werden.

Ungerade Zahlen 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 ....
Gliederzahl oder Ordnungszahl 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 ....

Eine aufmerksame Vergleichung zeigt, daß die Differenz zwischen der ungeraden Zahl und der diese bezeichnenden Gliederzahl immer 1 weniger beträgt, als die Gliederzahl selbst. Ist nun diese Gliederzahl bekannt, so braucht man nur eine Zahl zu derselben zu zählen, welche um 1 kleiner ist und man hat die ungerade Zahl gefunden, welche zu der Gliederzahl gehört. Z. B. Die 4. ungerade Zahl ist $4 + 3 = 7$; die 5. ist $5 + 4 = 9$. Dieß ergibt sich aber auch aus der Betrachtung der Zahlenreihe. Wenn 60 auf einander folgende ungerade Zahlen da sind, so liegen zwischen diesen 59 gerade, weil die Reihe mit einer ungeraden Zahl anfängt. Da die geraden und ungeraden Zahlen regelmäßig mit einander abwechseln, und die erste ganze Zahl als ungerad genommen wird, so muß überhaupt eine Reihe regelmäßig auf einander folgender ungerader Zahlen um 1 größer sein, als die Reihe der dazwischen liegenden geraden Zahlen. Deutlichere Darstellung:

Ungerade Zahlen a. 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17 ....
Gliederzahl zu den unger. Zahlen b. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ....
Unterschied der jedesmaligen ungeraden Zahl von der Gliederzahl c. 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ....

Hieraus ergibt sich nun:

1. Die Differenz zweier zunächst auf einander folgenden ungeraden Zahlen ist 2.

2. Subtrahirt man jedes Glied in der Reihe b von dem ihm zukommenden Gliede der ungeraden Zahlenreihe a, so ergibt sich ebenfalls eine arithmetische Reihe (c) mit der Differenz 1.

3. Addirt man diese Unterschiedsreihe c zu der Ordnungszahlenreihe b, so erhält man wieder die Reihe der ungeraden Zahlen a.

4. Jedes Glied der Reihe c ist um 1 kleiner, als das ihm zukommende Glied in der Reihe b.

Es läßt sich nun hieraus die ungerade Zahl leicht bestimmen. Z. B. Die sechste ungerade Zahl ist $6 + 5 = 11$; die neunte ungerade Zahl ist $9 + 8 = 17$; die hundertste ungerade Zahl ist $100 + 99 = 199$.

In der vorigen Aufgabe sollte die sechszigste ungerade Zahl gesucht werden. Diese ist $= 60 + 59 = 119$. In der sechszigsten Sekunde fällt nun ein Körper durch $119 \times 15 = 1785$ Fuß.

4) A hat von B 1950 Thaler zu 5 proc. Zinsen geliehen. Er bezahlt jedes Jahr 150 Thl. vom Kapital nebst den verfallenen Zinsen; wie viel Zinsen muß er im Ganzen bezahlen?

Auflösung. Vorbereitung. So oft A 150 Thl. schuldig ist, so manches Jahr hat er zu bezahlen. $150 : 1950 = 13$. Im ersten Jahr bezahlt er die Zinsen vom ganzen Kapital, also $^1/_{20}$ mal $1950 = 97^1/_2$ (S. 75 die zweite und dritte Anmerkung). Im zweiten Jahr bezahlt er die Zinsen von 150 Thl. weniger, also $97^1/_2 - {}^1/_{20} \times 150 = 97^1/_2 - 7^1/_2 = 90$; im dritten Jahr ebenfalls die Zinsen von 150 Thl. weniger u. s. f. Da die Zinsen regelmäßig um $7^1/_2$ Thl. abnehmen, so haben wir hier eine arithm. Progression und zwar eine fallende. Wir kennen davon:

a. Das erste Glied $= 97^1/_2$ Thl.
b. Die Differenz $= 7^1/_2$ „
c. Die Anzahl der Glieder $= 13$

Da die Progression abnimmt, so wird das letzte Glied sein $= 97^1/_2 - 12 \cdot 7^1/_2 = 97^1/_2 - 90 = 7^1/_2$.

$97^1/_2 + 7^1/_2 = 105$ Summe des ersten und letzten Gliedes
$6^1/_2$ halbe Anzahl der Glieder
$682^1/_2$

5) Zu einem Kapital, welches zu 5 proc. verzinset stand, wurde jedes Jahr 250 Thl. zugelegt. Nach 10 Jahren betrugen die sämmtlichen Zinsen $1812^1/_2$ Thl.; wie groß war das Kapital anfänglich?

Auflösung. $1812^1/_2$ ist der sämmtliche Zins oder die Summe aller Glieder. Da die Anzahl der Glieder 10 ist, so bilden diese 5 Gliederpaare 5 gleiche Produkte, welche zusammen genommen $1812^1/_2$ ausmachen.

Um die Zinssumme des ersten Kapitals zu erfahren, müssen wir die Zinssumme der jährlich zugelegten Kapitalien von $1812^1/_2$ abziehen. Die Zinsen der Zulagen bilden eine arithm. Progression, deren erstes Glied ${}^1/_{20} \cdot 250 = 12^1/_2$, letztes Glied $= 9 \cdot 12^1/_2 + 12^1/_2 = 125$, Anzahl der Glieder $= 10$. Die Summe der Zinsen von den zugelegten Kapitalien ist demnach $(12^1/_2 + 125)\ 5 = 687^1/_2$. Die 10jährigen Zinsen für das unbekannte Kapital sind $= 1812^1/_2 - 687^1/_2 = 1125$, auf 1 Jahr $= 112{,}5$. Das anfängliche Kapital $= 20 \cdot 112{,}5 = 2250$ Thl.

Digitized by Google

Ein und zwanzigster Abschnitt.

Von den Potenzen.

Vorbemerkung. Wer in der Lehre vom Ausziehen der Quadrat- und Kubik-Wurzel, von den Logarithmen und späterhin in der Buchstabenrechnung nicht aufgehalten werden will, der mache sich vorher mit der Lehre von den Potenzen bekannt. Das Rechnen mit Potenzen vollständig durchgeführt, ist übrigens kein Bedürfniß für den Zifferrechner; einige Kenntniß des Wesentlichen dieser Rechnungsart ist aber eine gute Vorbereitung zum algebraischen Studium.

§. 165. Jede Zahl können wir als ein Produkt ansehen, von welchem 1 und diese Zahl selbst Faktoren sind. Z. B. $7 = 7 \cdot 1$, d h. die Faktoren des Produkts 7 sind 7 und 1. Ferner $^3/_4 = {}^3/_4 \cdot 1$. Da nun nach dieser Ansicht 1 der allgemeine, ständige Faktor aller Zahlen ist, so kann der Unterschied der Zahlen nur von dem andern Faktor herrühren. Durch diesen andern Faktor allein lassen sich nun viele andere Zahlen bilden, und er kann deshalb auch die Grundzahl oder Basis oder auch Wurzel (radix) genannt werden. Jede Zahl aber, welche durch diese Grundzahl allein gebildet wird, heißt in Beziehung auf diese eine Zahlstufe oder Potenz, und die Zahl, welche anzeigt, wie oftmal die Grundzahl zur Hervorbringung einer bestimmten Potenz als Faktor gesetzt wurde, heißt der Grundanzeiger oder schlechthin Anzeiger, oder auch der Exponent, welcher der Ziffer der Grundzahl rechts, oben an gesetzt wird. Wird 1 nur 1 mal mit der Grundzahl multiplicirt, so wird das Produkt eine Potenz vom ersten Grade genannt, z. B. $1 \cdot 7 = 7^1$. Wird 7^1 abermals mit der Grundzahl multiplicirt, also $7^1 \cdot 7$, so erhält man von 7 eine Potenz vom zweiten Grade $= 7^{1+1}$ d. i. $= 7^2$ u. s. w.

$1 \cdot 7 = 7^1$; $1 \cdot {}^3/_4 \cdot \ldots\ldots\ldots = ({}^3/_4)^1$
$1 \cdot 7 \cdot 7 = 7^2$; $1 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot \ldots\ldots = ({}^3/_4)^2$
$1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$; $1 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot \ldots = ({}^3/_4)^3$
$1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$; $1 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot \ldots = ({}^3/_4)^4$
$1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$; $1 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 = ({}^3/_4)^5$

Der Augenschein lehrt, daß der Exponent mit der Anzahl der gleichen Faktoren übereinstimmt. Man kann daher den Exponenten als den Anzeiger der gleichen Faktoren ansehen, mit welchen die Einheit (1) ist multiplicirt worden. Das Verfahren, auf diese Weise eine Zahl hervorzubringen, heißt Erheben oder Potenziren. Geht man rückwärts von der Potenz zur Grundzahl und noch weiterhin, so gestaltet sich folgende Bezeichnung.

a. $1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

b. $1 \cdot 7 \cdot 7 = 7^2 = \frac{1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7} = 7^{3-1}$

c. $1 \cdot 7 = 7^1 = \frac{1 \cdot 7 \cdot 7}{7} = 7^{2-1}$

d. $1 = 7^0 = \frac{1 \cdot 7}{7} = 7^{1-1}$

Digitized by Google

e. $\frac{1}{7^1} = 7^{-1} = \frac{1}{7} = 7^{0-1}$

f. $\frac{1}{7^2} = 7^{-2} = \frac{1}{7 \cdot 7} = 7^{0-2}$

g. $\frac{1}{7^3} = 7^{-3} = \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7} = 7^{0-3}$

Dividirt man a durch 7, so erhält man b;
: : b : 7 : : : c;
: : c : 7 : : : d;
: : d : 7 : : : e;
Der Exponent nimmt immer um 1 ab.
Multiplicirt man d mit 7, so erhält man e;
: : c : 7 : : : b;
: : b : 7 : : : a;
Bei d finden wir $7^0 = 1$.
Bei e, f und g finden wir negative Exponenten, und jedesmal ist die Potenz ein Bruch, dessen Zähler = 1, dessen Nenner aber eine Potenz von 7.

a. $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

b. $1 \cdot 4 \cdot 4 = 4^2 = \frac{1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4} = 4^{3-1}$

c. $1 \cdot 4 = 4^1 = \frac{1 \cdot 4 \cdot 4}{4} = 4^{2-1}$

d. $1 = 4^0 = \frac{1 \cdot 4}{4} = 4^{1-1}$

e. $\frac{1}{4^1} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 4^{0-1}$

f. $\frac{1}{4^2} = 4^{-2} = \frac{1}{4 \cdot 4} = 4^{0-2}$

g. $\frac{1}{4^3} = 4^{-3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4^{0-3}$

Wir lernen hieraus Folgendes:

1. Wird der Exponent vermehrt, so wird die Potenz erhöht, d. h. durch ihre Grundzahl multiplicirt.
2. Wird der Exponent vermindert, so wird die Potenz erniedert, d. h. durch ihre Grundzahl dividirt.
3. Alle Zahlen mit dem Exponenten 0 sind = 1.
4. Alle Potenzen mit dem Exponenten 1 sind der Grundzahl oder Basis gleich.
5. Alle Potenzen mit einem negativen Exponenten sind einem Bruche gleich, dessen Zähler 1 und dessen Nenner gleich der Grundzahl mit demselben aber positiven Exponenten.
6. Alle Potenzen der Nenner von Stammbrüchen erhalten einen negativen Exponenten.

Digitized by Google

7. Alle Potenzen aus ganzen Zahlen erhalten einen positiven Exponenten.

8. Die Einheit (1) kann durch jede ganze oder gebrochene Zahl mit dem Exponenten 0 dargestellt werden. $2^0 = 1$; $(^2/_3)^0 = 1$, denn $(^2/_3)^0 = \frac{1 \,.\, ^2/_3}{^2/_3} = 1$.

Anmerkung. 7^2 wird gelesen 7 im Quadrat oder kurz 7 hoch 2. Der Werth einer Potenz vom zweiten Grade d. i. einer Grundzahl hoch 2 heißt eine Quadratzahl. 7^3 wird gelesen 7 im Kubus oder 7 hoch 3, und der Werth davon heißt eine Kubikzahl.

Aufgaben.

1) Stelle 9^6, 9^5, 9^4, 9^3, 9^2, 9^1, 9^0 jede Potenz für sich durch eine Reihe Faktoren dar $9^6 = 1 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 9$ u. s. w.

2) Drücke $1 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5$; $1 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5$; 1 in Form einer Potenz, jedesmal mit der Basis 5 aus. $1 = 5^0$; $1 \,.\, 5 = 5^1$; $1 \,.\, 5 \,.\, 5 = 5^2$ u. s. w.

3) Versuche folgende Potenzen 9^{-1}; 9^{-2}; 9^{-3}; 9^{-4}; 9^{-5}; 9^{-6} in einer Bruchform darzustellen; $9^{-1} = \frac{1}{9^1}$; $9^{-2} = \frac{1}{9^2}$; $9^{-3} = \frac{1}{9^3}$ u. s. w.

4) Bezeichne folgende, in Bruchform dargestellte Potenzen, durch Potenzen mit negativen Exponenten: $\frac{1}{10^1}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{10^5}$, $\frac{1}{10^6}$, $\frac{1}{10^1} = 10^{-1}$; $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$; $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ u. s. w.

Mehr Aufgaben dieser Art befinden sich in unserm dritten Uebungsbuche.

§. 166. Soll eine Zahl auf einen hohen Grad erhoben werden, so kann man vortheilhaft auf folgende Weise verfahren. 4 soll auf die 12te Potenz erhoben werden.

4	4	4
4	4	4
$16 = 4^2$	$16 = 4^2$	$16 = 4^2$
$16 = 4^2$	$16 = 4^2$	$4 = 4^1$
$256 = 4^4$	oder $256 = 4^4$	oder $64 = 4^3$
$256 = 4^4$	$16 = 4^2$	$64 = 4^3$
$65536 = 4^8$	$4096 = 4^6$	$4096 = 4^6$
$256 = 4^4$	$4096 = 4^6$	$4006 = 4^6$
$16777216 = 4^{12}$	$16777216 = 4^{12}$	$16777216 = 4^{12}$

Daß $4^2 \,.\, 4^2 = 4^{2+2} = 4^4$ und $4^4 \,.\, 4^4 = 4^{4+4} = 4^8$ ist, wird aus dem Folgenden klar werden.

5) Erhebe auf dieſe Weiſe 3 auf die 10te Potenz = 59049.

§. 167. Im §. 144 haben wir geſehen, daß eine gerade Anzahl negativer Faktoren ein poſitives Produkt, eine ungerade aber ein negatives Produkt gibt. Dieß muß man ſich bei den Potenzen ebenfalls wol merken. Der Exponent zeigt die Anzahl der Faktoren an. Iſt nun die Baſis der Potenz negativ, ſo muß die zweite Potenz — mal —, folglich + ſein; die dritte Potenz iſt dann — mal — mal — = —, d. i. — mal — = + und + mal — = — u. ſ. f.

— mal — = + Potenz hoch 2
— mal — mal — = — " " 3
— mal — mal — mal — = + " " 4
— mal — mal — mal — mal — = — " " 5

Stellen wir die Potenzen nach §. 165 dar, ſo müſſen wir die Einheit oder beſſer 1 in Beziehung auf Entgegengeſetztheit der Größen als neutral annehmen, d. i. ſo, daß dieſe 1 der Baſis einer Potenzreihe ihren Charakter weder nimmt noch gibt. Aus dem eben Dargeſtellten ergibt ſich, daß alle Potenzen mit geraden Exponenten poſitiv, mit ungeraden Exponenten aber negativ ſind. Beim Multipliciren entblößen wir den Faktor von allen zufälligen äußern Merkmalen, und ſehen ihn ſchlechthin als reine Zahlgröße an. Nachher geben wir durch Beziehung und Reflexion dem Produkt ſein, ihm durch dieſe Beziehung nothwendig zukommendes Merkmal.

6) Erhebe — 2 a) auf die zweite, vierte, ſechſte und achte Potenz;
b) ferner auch auf die dritte, fünfte und ſiebente Potenz.

a. $-2.-2=+2^2$; $-2.-2.-2.-2=+2^4$ u. ſ. w.
b. $-2.-2.-2=-2^3$; $-2.-2.-2.-2.-2=-2^5$ u. ſ. w.

7) Eben ſo verfahre mit $-\frac{3}{4}$.

a. $-\frac{3}{4} \cdot -\frac{3}{4} = +\frac{3^2}{4^2} = (\frac{3}{4})^2$ u. ſ. w.

b. $-\frac{3}{4} \cdot -\frac{3}{4} \cdot -\frac{3}{4} = -(\frac{3}{4})^3$ u. ſ. w.

Sind die Potenzexponenten ganze Zahlen, ſo zeigen ſie, wie ſchon geſagt, an, wie oftmal die Baſis als Faktor ſoll geſetzt werden. Z. B. $9^2 = 9 \cdot 9$; ſind dieſe Exponenten aber gebrochene Zahlen, ſo zeigen ſie an, in wie viel gleiche Faktoren man die Baſis zerlegen und wie viel derſelben man nehmen müſſe; z. B. $9^{1/2}$ heißt: man ſoll 9 in . 2 gleiche Faktoren zerlegen und einen davon nehmen. Die beiden gleichen Faktoren von 9 ſind aber 3 und 3, von dieſen beiden ſoll hier einer genommen werden; alſo $9^{1/2} = 1 : 3 = 3$; ferner: $64^{2/3}$ heißt: 64 ſoll in 3 gleiche Faktoren zerlegt und davon 2 genommen werden; alſo $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$. Davon $^2/_3$ derſelben $= 4 \cdot 4 = 16$.

$16 - {}^3/_4 = 1$ dividirt durch 3 mal den 4. Theil von $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$$= \frac{1}{{}^3/_4\,(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Digitized by Google

8) Welches ist der Werth von a) $27^{2/3}$? b) von $27^{-2/3}$?

a. $27^{2/3} = {}^2/_3\,(3 . 3 . 3) = 3 . 3 = 3^2 = 9$.

b. $27^{-2/3} = \frac{1}{{}^2/_3\,(3 . 3 . 3)} = \frac{1}{3 . 3} = {}^1/_3{}^2 = {}^1/_9$.

§. 168. Das Erheben (Potenziren) der Potenzen oder Potenzen von Potenzen.

$(3^2)^2$ ist nicht 3^{2+2} oder 3^5 sondern $= (3 . 3 . 3)^2 = 3^3 . 3^3 = 27 . 27 = 27^2 = 729$ oder $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6 = 729$. $(3^3)^2$ bedeutet, daß der Werth der eingeschlossenen Potenz aufs Quadrat erhoben werden soll.

9) $(3^2)^3 = 3^2, 3^2, 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$; $(2^3)^5$ $2^3 . 2^3 . 2^3 . 2^3 . 2^3 . = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15} = 32768$.

10) $(2^{-2})^3 = 2^{-2} . 2^{-2} . 2^{-2} = 2^{-2 \cdot 3} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$ $= {}^1/_{64}$.

Um also eine Potenz auf einen höhern Grad zu erheben, multiplicire man den Exponent mit dem Grade, auf den sie erhoben werden soll.

§. 169. Zurückführen einer Potenz auf niedere Grade.

Das Zurückführen einer Potenz auf niedere Grade oder auf die Basis, die Grundzahl, wird das Wurzelausziehen genannt. Dieß Verfahren wird durch $\sqrt{}$ (Wurzelzeichen) angedeutet. Eine Ziffer oben in der Oeffnung dieses Zeichens zeigt den Grad an, um welchen die Potenz zurückgeführt werden soll. Z. B. $\sqrt[2]{3^4} = 3^{4:2}$ zeigt an, daß 3^4 um 2 Grade zurückgeführt, oder mit andern Worten, daß 3 auf die 4te Potenz erhoben, und daraus die Quadratwurzel gezogen werden soll. Jedesmal bezeichnet der Zähler des Bruch-Exponenten einer Potenz den Grad des Erhebens, der Nenner aber den Grad des Zurückführens oder den Grad der Wurzel, welche ausgezogen werden soll. $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2}$ $= 3^6$ und $\sqrt[2]{3^6} = 3^{6:2} = 3^3$; $\sqrt[2]{3^6} = \sqrt[2]{3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3}$ $= 3 . 3 . 3 = 3^3$, woraus sich zugleich ergibt, daß $\sqrt[2]{3^6}$ nicht anders heißt, als die halbe Anzahl der gleichen Faktoren von 3^6 darstellen. $\sqrt[2]{4^6} = \sqrt[2]{4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4} = 4 . 4 = 4^2$ oder $\sqrt[2]{4^6} = 4^{6:2}$ $= 4^2$; $(6^2)^2 = 6^{2 \cdot 2} = 6^4$; $\sqrt[2]{6^2} = 6^{2/2} = 6^1 = 6$; $(6^3)^2$ $= 6^{3 \cdot 2} = 6^6$; $\sqrt[2]{6^3} = 6^{3/2} = 6^1 = 6$. $\sqrt[4]{6^7} = 6^{7/4}$; $\sqrt[6]{8^5}$ $= 8^{5/6}$; $\sqrt[5]{8^6} = \sqrt[5]{8^5 . 8^1} = \sqrt[5]{8^5} . \sqrt[5]{8^1} = 8\sqrt[5]{8^1} = 8\sqrt[5]{8}$. Hieraus ergibt sich nun, daß das Zurückführen einer Potenz das Gegentheil vom Erheben derselben ist. Hier werden die Exponenten multiplicirt, dort dividirt.

11) $\sqrt[3]{8^9} = 8^{9/3} = 8^3$; $\sqrt[3]{3^5} = 3^{5/2}$ oder $3^{12/2}\sqrt[10]{25^{20}} = 25^{20/10} = 25^2$.

12) $\sqrt{20^{-11}} = \sqrt[4]{\frac{1}{10^{12}}} = \frac{1}{10^{12/4}} = \frac{1}{10^3} = {}^1/_{1000}$.

Eine vollständigere Behandlung der Potenzen gehört der Buchstabenrechenkunst an.

Zwei und zwanzigster Abschnitt.

§. 170. Vom Ausziehen der Quadratwurzel.

Anmerkung. Der Schluß des vorigen Abschnitts führte im Allgemeinen auf das Wurzel-Ausziehen. Von vielen Freunden der gemeinen Rechenkunst, sogar noch von manchen Lehrern, wird das Ausziehen der Quadrat- und Kubik-Wurzel für eine so schwierige, so schwer zugängliche Sache angesehen, daß sie diese Kunst für den Gipfel des praktischen Ziffer-Rechnens halten. Ein solcher Irrthum wurde gewiß größtentheils durch die unzweckmäßige Methode, nach welcher die Lehrer diesen Gegenstand behandelten, veranlaßt. Sie lernten das Wurzelausziehen als ein Kunststück, und waren wol der Meinung, daß der Zufall einst den Rechner zur Lösung solcher arithmetischen Räthsel und zur Ausführung solcher Rechen-Kunststücke geführt habe. Daher kam es denn auch, daß diese, mit vieler Mühe erworbene mechanische Geschicklichkeit so bald wieder verloren ging. Allerdings hat die Sache für den Schüler einige Schwierigkeit, da das Wurzelausziehen ein zusammengesetztes, künstliches Verfahren ist. Eine zweckmäßige Lehrweise mindert aber diese Schwierigkeit, wenn auch nicht ganz, doch sehr bedeutend. Viele Lehrer ließen sich, um mit dem Katechismus zu reden, eine zweifache Sünde zu Schulden kommen, eine Unterlassungs- und eine Begehungs-Sünde, oder mathematisch ausgedrückt, sie fehlten negativ und positiv; negativ: indem sie Wesentliches ausließen, wohin wir das Entstehenlassen oder Bilden einer Quadrat- oder Kubikzahl rechnen; positiv: indem sie dem Schüler alle Schwierigkeiten auf einmal vorführten, nämlich: das Eintheilen der Quadrat- oder Kubikzahl, das vorsichtige Dividiren, die künstliche Untereinanderstellung der Produkte, das klassenweise Herunterrücken der eingetheilten Quadrat- oder Kubikzahl, nicht zu gedenken der Darstellung der Wurzel in Decimalbrüchen bei irrationalen Zahlen. Selbst dann, wenn ein Lehrer es für ganz zweckmäßig halten sollte, — welches ich nicht unbedingt verneinen möchte — zuerst das mechanische Verfahren und nachher das Begründen desselben zu lehren, selbst dann wäre jene Methode noch verkehrt zu nennen. „Nur eins auf einmal."

Ehe der Lehrer mit der Sache selbst beginnt, suche er im Schüler das Bedürfniß zu dieser Kenntniß anzuregen. Das wird den Schüler antreiben, diese neue Art zu rechnen kennen zu lernen. Welch ein Gewinn für die Bildung, wenn der Lehrer die Kunst verstände, dem Schüler allen Unterricht zum Bedürfniß zu machen! Aus diesem Grunde fordert die 97ste der vermischten Aufgaben unseres ersten Uebungsbuches das Aufsuchen der Quadratwurzel. Der Schüler soll hier, am Ende des Buches, die Ueberzeugung gewinnen, daß es im Rechnen noch Neues für ihn zu lernen gibt; der Lehrer aber soll Veranlassung nehmen, in dem Schüler das Verlangen, weiter zu kommen, recht rege zu machen.

Zuerst soll der Schüler die Wurzel einer Quadrat- und Kubikzahl bloß durch Kopfrechnen bestimmen, ohne Griffel und Tafel zu gebrauchen. Auf diese Weise lernt er am leichtesten den Sinn und die Forderung der neuen Rechnungsart kennen. Der Lehrer gebe zuerst einige geometrische Aufgaben, in welchen das Ausziehen der Wurzel nothwendig gefordert wird. Er mache den Schüler darauf aufmerksam, daß man den Flächeninhalt eines Quadrats

Digitized by Google

erhält, wenn man die gegebene Seite mit sich selbst multiplicirt; frage ihn aber dann, wie er es wol anfangen wolle, die Seite eines Quadrats aus dem Inhalt desselben zu bestimmen. Jetzt wird er die Forderung, welche man an ihn macht, verstehen, und bei leichten Aufgaben wieder bald eine Zahl gefunden haben, welche, mit sich selbst multiplicirt, dem gegebenen Flächeninhalt des Quadrats gleich kommt. Der Lehrer gebe nun mehrere leichte Aufgaben dieser Art, gehe dann zu schwereren über, zuerst Quadratzahlen mit rationaler, dann mit irrationaler Wurzel. Der Schüler bestimmt die Wurzel noch bloß durch Kopfrechnen. Nun aber gebe der Lehrer absichtlich schwere Aufgaben, d. h. große Quadratzahlen, so daß deren Wurzeln durch Kopfrechnen sich nicht bestimmen lassen. Der Schüler befindet sich jetzt in Verlegenheit, und es entsteht in ihm der rege Wunsch, das Verfahren zu kennen, wie man von der Quadrat- oder Kubikzahl zur Wurzel gelangen könne. Das ist nun der rechte Moment, da der Schüler für den Unterricht recht empfänglich ist, und den der Lehrer nicht unbenutzt entschwinden lassen darf. Er führe nun dem Schüler die neuen Arbeiten planmäßig, vom Leichten zum Schweren fortschreitend, vor, und er kann eines guten Erfolges gewiß sein. —

§. 171. Eine Potenz vom zweiten Grade, oder ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren heißt eine Quadratzahl; das Erheben einer Zahl auf den zweiten Grad, oder das Multipliciren einer Zahl mit sich selbst heißt Quadriren, einer der beiden gleichen Faktoren heißt die Quadratwurzel, als Glied einer Potenzreihe oder Basis.

Anmerkung. Die Benennung Quadratzahl oder Quadratwurzel ist aus der Geometrie entlehnt. Eine gleichseitige rechtwinklige Figur wird ein Quadrat genannt. Der Flächeninhalt eines Quadrats wird gefunden, wenn man eine Seite desselben mit sich multiplicirt. Da dieser Inhalt eines Quadrats aber jedesmal aus dem Multipliciren zweier gleichen Zahlen hervorgeht, so hat man überhaupt ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren eine Quadratzahl, und einen dieser Faktoren, aus welchen die Quadratzahl entspringt, Quadratwurzel genannt.

§. 172.

1) Suche von folgenden ein- und zweiziffrigen Zahlen die Quadratzahlen: 4 , 7 , 9 , 10 , 20 , 30 , 40 , 50 ..... 90 , 12 , 16 , 24, 37 , (= 1369).
2) Quadrire folgende drei- und vierziffrige Zahlen: 100 , 200 , 300, 400 ..... 1000 , 2000 ..... 124 (= 15376) , 256 (65536).
3) Gib die Wurzel von folgenden Quadratzahlen an, d. h. suche eine Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt eins der folgenden Produkte gibt: 9 , 25 , 49 , 81 , 160 (= 13) , 225 (= 15) , 441 (= 21), 1784 (= 28).
4) Setze unter folgende Wurzelreihe a die dazu gehörige Quadratzahlenreihe b und unter diese die Differenzen je zweier beisammenstehender Quadratzahlen = c.

a. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10.
b. 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100.
c. 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17 , 19.
d. 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17 , 19 . . .
e. 1 , 9 , 25 , 49 , 81 , 121 , 169 , 225 , 289 , 361 . . .
f. 8 , 16 , 24 , 32 , 40 , 48 , 55 , 64 , 72.
g. 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22 , 25 . . .
h. 1 , 16 , 49 , 100 , 179 , 256 , 361 , 484 , 625 . . .
i. 15 , 33 , 51 , 69 , 87 , 105 , 123 , 141 . . .

k. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100...
l. 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100, 10000...
m. 300, 500, 700, 900, 1100, 1300, 1500, 1700, 1900...
n. 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900
o. 10000, 40000, 90000, 160000, 250000, 360000, 490000, 640000, 810000
p. 30000, 50000, 70000, 90000, 110000, 130000, 150000, 170000.

§. 173. Eine aufmerksame Vergleichung dieser dreifachen Reihen abc, def, ghi, klm, nop, lehrt Folgendes:

1. Die Differenzen der Quadratzahlen, welche aus einer arithmetischen Reihe entspringen, bilden ebenfalls eine arithmetische Reihe, und zwar bei der natürlichen Zahlenreihe eine solche mit der Differenz 2. Bildet die Wurzelreihe eine Progression mit der Differenz 2, so ist die Differenz der Quadratzahlenreihe 8; ist jene Differenz 3, so ist diese 18; ist jene 4, so ist diese 32 u. s. w.

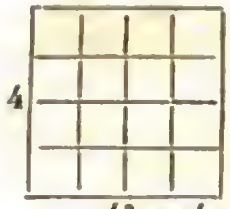
2. Die Differenz zweier Quadratzahlen ist gleich dem Produkt aus der Summe ihrer Wurzeln und Differenz. Z. B. $18^2 - 13^2$ $(18 + 13)(18 - 13) = 31$ mal $5 = 155$; $25^2 - 16^2 =$ $(25 + 16)(25 - 16) = 41$ mal $9 = 369$.

3. Aus einer Quadratzahl kann auf diese Weise leicht eine andere bestimmt werden, wenn deren Wurzeln bekannt sind. Z. B. Die Quadratzahl 576 nebst ihrer Wurzel 24 ist gegeben, die Quadratzahl von 28 wird gesucht. $28^2 - 24^2 = (28 + 24)(28 - 24)$ $= 52$ mal $4 = 208$; $576 + 208 = 784 = 28^2$; die Quadratzahl sei 10000, deren Wurzel ist 100; welches ist die Quadratzahl von 124? Wir können diese gleich in einem einzigen Ausdruck darstellen, nämlich: $124^2 = (124 + 100)(124 - 100)$ und $= 10000$ $= 224$ mal $24 = 10000 = 5376 = 10000 = 15376$.

4. Wenn die Wurzeln um 1 Einer oder 1 Zehner oder 1 Hunderter verschieden sind, so ist die Differenz ihrer Quadratzahlen gleich der Summe beider Wurzeln, und zwar bei den Einern so viel Einer, bei den Zehnern so viel Zehner und bei den Hunderten so viel Hunderter, als diese Summe beträgt. Z. B. 7 und 8 seien die Wurzeln, so differiren ihre Quadratzahlen um 15 Einer, denn $8^2 - 7^2 =$ $64 - 49 = 15$; die Wurzeln seien 70 und 80, so sind deren Quadratzahlen um $70 + 80 = 150$ Zehner $= 1500$ Einer verschieden. $80^2 - 70^2 = 6400 - 4900 = 1500$; die beiden gegebenen Wurzeln seien 700 und 800, so sind ihre Quadratzahlen um $700 + 800 = 1500$ Hunderte $= 150000$ Einer verschieden, denn: $800^2 - 700^2 = 640000 - 490000 = 150000$.

Anmerkung. Es bleibt dem Ermessen des Lehrers überlassen, ob er diese Bemerkung beim ersten Unterricht über diesen Gegenstand mit aufnehme. Ich würde beim ersten Kursus nicht dazu rathen, weil man durch die Menge des Neuen den Schüler leicht verwirrt, bei einer Wiederholung aber wird sie, als eine neue Zugabe, Interesse erregen.

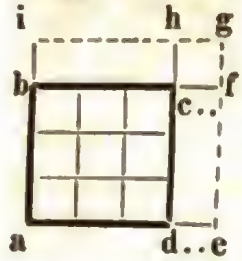
Digitized by Google



$4^2 = 4 \,.\, 4 = 16.$

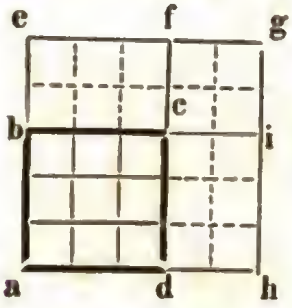
§. 174. Die aus der Geometrie entlehnte Benennung Quadratzahl gibt uns zur Darstellung derselben an einem Quadrat eine natürliche Veranlassung. Die Quadratzahl wird auf diese Weise recht zweckmäßig veranschaulicht. Z. B. $4^2 = 16$; durch ein Quadrat dargestellt:

Auch läßt sich die Vergrößerung einer Quadratzahl recht anschaulich an einem Quadrate darstellen. Die Seite eines Quadrats sei = 3 Zoll, dasselbe soll vergrößert werden, so daß jede Seite = 4 Zoll. Das vergrößerte Quadrat von 4^2 enthält:



1) Das gegebene Quadrat a b c d $= 3^2$; 2) zwei Rechtecke = b c h i und c d e f; und 3) das Quadrat der Lücke c f g h. Das neue vergrößerte Quadrat besteht daher aus 3 Theilen:

1)	3^2	$= 9$
2)	2 (3 mal 1)	$= 6$
3)	1^2	$= 1$
a e g i		$= 16$



Soll das gegebene Quadrat um 2 vermehrt werden, so kann auch dieß recht anschaulich dargestellt werden. Z. B. Das Quadrat abcd soll vergrößert werden, so daß jede Seite = 5. Das vergrößerte Quadrat aegh besteht dann, wie die Figur zeigt, aus:

1) a^2; 2) aus den beiden Rechtecken befc und dcih; 3) aus dem Quadrat cfgi. Es ergeben sich also hier ebenfalls 3 Produkte auf dieselbe Weise wie vorher, nämlich:

1) a b c d	$=$	3^2 $= 9$
2) b e f c u. d c i h	$=$	2 (3 mal 2) $= 12$
3) c f g i	$=$	2^2 $= 4$
Das Quadrat a e g h	$=$	$25 = 5^2$.

§. 175. Der vorige Paragraph leitet uns zur allgemeinen Darstellung der Quadratzahl eines Binomiums, d. i. einer zweitheiligen Wurzel. 5^2 ist nämlich so viel als $(3 + 2)^2$; dieser Ausdruck ist aber, wie wir gesehen, $= 3^2 + 2\,(3 \,.\, 2) + 2^2$. Auf diese Weise läßt sich nun aus jeder Quadratwurzel ihre Quadratzahl darstellen. $24^2 = (20 + 4)^2 = 20^2 + 2\,(20 \,.\, 4) + 4^2 = 400 + 160 + 16 = 576$, oder wie folgt:

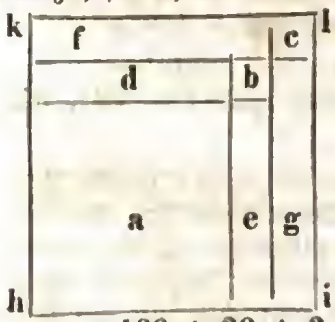
$$\left.\begin{array}{r} 20 + 4 \\ 20 + 4 \end{array}\right\} \text{multiplicirt.}$$

$$\begin{array}{r} 20^2 + 4 \,.\, 20 \\ 4 \,.\, 20 + 4^2 \\ \hline 20^2 + 2\,(4 \,.\, 20) + 4^2 \\ 400 + 160 \quad + 16 = 576. \end{array}$$

Anmerkung. Der Lehrer sieht gleich, daß sich hier schon die 3 Haupttheile der Quadratzahl einer zweitheiligen Wurzel ergeben. Die angegebene Uebung ist zum Verständniß des Quadratwurzelausziehens von großer Wichtigkeit, daher möge sie ja nicht übergangen werden.

5) Auf die letzte Weise, so wie zugleich an einem Quadrat, sollen die Quadratzahlen von 18, 28, 36, 57, 78 dargestellt werden.

§. 176. Auch die Quadratzahl einer dreitheiligen Wurzel kann durch ein Quadrat anschaulich dargestellt werden. Z. B. 123 sei die Wurzel, so nehmen wir die 3 Theile: 100 + 20 + 3.



100 + 20 + 3

Hier haben wir nun:

	$a = 100^2 =$	10000
d und e	$= 2\,(20 \cdot 100) =$	4000
	$b = 20^2 =$	400
f und g	$= (120 \cdot 3) =$	720
	$c = 3^2 =$	9
	$hikl = 123^2 =$	15129

Ohne Figur:

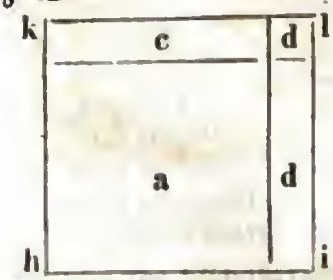
$$\begin{array}{rlll} 123 = & 100 + 20 & + 3 & \\ & 100 + 20 & + 3 & \\ \hline & 100^2 + 20 \cdot 100 & + 3 \cdot 100 & \\ & 20 \cdot 100 + 20^2 & + 3 \cdot 20 & \\ & 3 \cdot 100 + 3 \cdot 20 & + 3^2 & \end{array}$$

Gehörig geordnet:

$$\begin{array}{rlll} = & 100^2 + 20^2 + 3^2 + 2\,(20 \cdot 100) & + 2\,(3 \cdot 100) & + 2\,(3 \cdot 20) \\ \text{od.} = & 100^2 + 20^2 + 3^2 + 2\,(20 \cdot 100 & + 3 \cdot 100 & + 3 \cdot 20) \\ = & 10000 + 400 + 9 + (4000 & + 600 & + 120) \\ = & 10409 + 4720 & = & 15129. \end{array}$$

oder auch in folgender Ordnung: $100^2 + 2\,(\,.\,100\,.\,20) + 20^2 + 2\,(100 + 20)\,3 + 3^2$.

Diese Quadratzahl kann aber auch zweitheilig dargestellt werden, z. B.



a^2	$= 120^2 =$	14400
$2\,(c+d)$	$= 2(120 \cdot 3) =$	720
b^2	$= 3^2 =$	9
Das Quadrat hikl		$= 15129$

Ohne Figur:

$$\begin{array}{rlll} 123 = & 120 + & 3 & \\ & 120 + & 3 & \\ \hline & 120^2 + & 3 \cdot 120 & \\ & & 3 \cdot 120 + 3^2 & \end{array}$$

$$120^2 + 2(3 \cdot 120) + 3^2$$
$$= 14400 + 720 + 9 = 15129.$$

Jede Wurzel kann auf diese Weise zweitheilig dargestellt und behandelt werden.

$1^2=(1/2+1/2)^2=(1/2)^2+2\,(1/2\,.\,1/2)+(1/2)^2=1/4+1/2+1/4=1$
$1^2=(3/4+1/4)^2=(3/4)^2+2\,(1/4\,.\,3/4)+(1/4)^2=9/16+6/16+1/16=1$
$7^2=(3+4)^2=3^2+2\,(4\,.\,3)+4^2=9+24+16=49$
$7^2=(5+2)^2=5^2+2\,(2\,.\,5)+2^2=25+20+4=49$
$256^2=(250+6)^2=250^2+2(6\,.250)+6^2=62500+3000+36=65536$
$256^2=(240+16)^2=240^2+2(16.240)+16^2=57600+7680+256=65536$
$2345^2=(2340+5)^2=2340^2+2\,(5\,.2340)+5^2=5499025$
$2345^2=(2300+45)^2=2300^2+2\,(45\,.2300)+45^2=$ "
$2345^2=(2000+345)^2=2000^2+2\,(345\,.2000)+345^2=$ "

6) Auf diese Weise soll verfahren werden mit 144, 576, 784, 852, 1831.

§. 177. Bei aufmerksamer Erwägung der beiden letzten Paragraphen ergeben sich als Bestandtheile jeder Quadratzahl drei Produkte, welche aus der, in zwei Theile zerlegten Quadratwurzel gebildet werden. Aus der Quadratwurzel läßt sich auf eine anschauliche Weise die, ihr zukommende Quadratzahl konstruiren, und man kann schon jetzt mit ziemlicher Sicherheit vermuthen, daß das Ausziehen der Quadratwurzel nichts anders sein wird, als das Zerlegen einer Quadratzahl in ihre Elemente oder eines Produkts in zwei gleiche Faktoren; ferner das: so wie man von der Wurzel vorwärts zur Quadratzahl geht, so werde man beim Ausziehen der Quadratwurzel wieder rückwärts zur Wurzel gehen müssen.

§. 178. Obgleich wir durch das Vorhergehende dem Verfahren, welches beim Ausziehen der Quadratwurzel zu beobachten ist, bedeutend näher gekommen sind, so ist dieß doch nicht hinreichend, und es ist für unsern Zweck nothwendig, noch andere Hülfsmittel ausfindig zu machen. Um aus der Quadratzahl die Wurzel bestimmen zu können, mangelt uns jetzt noch die Kenntniß eines wesentlichen Stücks. Es ist nämlich nothwendig zu wissen, wie man aus der Quadratzahl die Zifferanzahl der Wurzel bestimmen kann. Wir wollen zu dem Ende von den niedern und höhern Zahlenordnungen die kleinste und größte Einheit als Wurzel annehmen, und zusehen, wie viel Ziffern die Quadratanzahl derselben enthält.

Der kleinste Einer	=	1,	die Quadratzahl davon	1,	Eine Ziff.
" größte "	=	9,	" " "	81,	zwei "
" kleinste Zehner	1 =	10,	" Einer, die Quadratzahl davon	100,	drei "
" größte "	9 =	90,	" " " "	8100,	vier "
" kleinste Hund.	1 =	100,	" " " "	10000,	fünf "
" größte "	= 9 =	900,	" " " "	810000,	sechs "
" kleinste T.	= 1 =	1000,	" " " "	1000000,	sieben "
" größte "	= 9 =	9000,	" " " "	81000000,	acht "

Aus der Anzahl der Ziffern einer Quadratzahl läßt sich nun die Ziffernanzahl ihrer Wurzel bestimmen.

1. Enthält die Quadratzahl 1 oder 2 Ziffern, so hat die Wurzel Eine Ziffer.

2. Enthält die Quadratzahl 3 oder 4 Ziffern, so besteht ihre Wurzel aus zwei Ziffern.
3. " " " 5 oder 6 Ziffern, so zählt ihre Wurzel drei Ziffern.
4. " " " 7 oder 8 Ziffern, so hat die Wurzel vier Ziffern.

Durch eine aufmerksame Vergleichung ergibt sich, 1) die Anzahl der Wurzelziffern ist gleich der halben Anzahl der Ziffern von der Quadratzahl, wenn die Stellenzahl gerade ist; 2) ist die Anzahl der Quadratzahl-Ziffern ungerade, dann zähle man derselben 1 zu, und dividire diese Summe durch 2, so erhält man die Anzahl der Wurzelziffern; und umgekehrt: die Quadratzahl enthält entweder die doppelte Anzahl der Wurzelziffern, oder diese doppelte Anzahl — 1. Die Quadratzahlen von 1, 2, 3 haben eben so viel Ziffern als ihre Wurzeln; 4 ist die erste einziffrige Wurzel einer zweiziffrigen Quadratzahl; 32 ist die erste zweiziffrige Wurzel von einer vierziffrigen Quadratzahl; 317 ist die erste dreiziffrige Wurzel von einer sechsziffrigen Quadratzahl.

Anmerkung. Der Lehrer schreibe mehrere größere und kleinere Zahlen an die Tafel, stelle diese als Quadratzahlen auf, und frage nun die Schüler, wie viel Ziffern die Wurzel von jeder enthält.

§. 179. Aus dem Vorigen ergibt sich, daß die Einerordnung der Wurzel zwei Stellen in ihrer Quadratzahl, nämlich die erste und zweite Ziffer; die Zehnerordnung der Wurzel ebenfalls zwei Stellen in der Quadratzahl, nämlich die dritte und vierte, überhaupt jede Zahlordnung als Wurzel, zwei Stellen in der Quadratzahl einnimmt. Hierauf gründet sich die Eintheilung der Quadratzahl von der rechten zur linken Hand in Klassen von zwei Stellen. Da aber die Quadratzahl, wie wir vorhin gesehen, oft 1 weniger als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzelzahl hat, so wird auch oft eine Klasse in der Quadratzahl nur Eine Ziffer enthalten müssen. Z. B. Die Wurzel sei 576. Hier bekommt die Einerordnung die zwei Stellen 76, die Zehnerordnung aber nur Eine Stelle, nämlich 5. Ist die Anzahl der Ziffern einer Quadratzahl gerade, so erhält beim Eintheilen jede Klasse zwei Ziffern; ist aber diese Anzahl ungerade, so wird die Klasse der höchsten Zahlenordnung nur Eine Ziffer erhalten.

Gewöhnlich theilt man diese Klassen unten durch ein Komma ab, z. B. 5,76. Da aber die Decimalbrüche auf eben diese Weise bezeichnet werden, und dadurch, besonders wenn die Wurzel aus Decimalbrüchen gezogen werden soll, leicht Irrung entstehen kann, so wollen wir diese Eintheilung durch ein Komma von oben bezeichnen, also 5'76 oder 6'55'36.

§. 180. Wir haben vorher gesehen, daß jede Wurzel zweitheilig dargestellt und jede Quadratzahl aus drei, immer nach denselben Gesetzen entstandenen Produkten konstruirt werden kann. $25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2\,(20 + 5) + 5^2$; $256^2 = (250 + 6)^2 = 250^2 + 2\,(250 + 6) + 6^2$ (siehe §. 182). Diese drei Produkte sind daher

Digitized by Google

wesentliche Theile jeder, aus einer zweitheiligen Wurzel (Binomium) gebildeten Quadratzahl. Sie sind:

1. das Quadrat des ersten Theils . . . . . 20^2
2. " " " zweiten " . . . . . 5^2
3. das doppelte Produkt des ersten Theils in den zweiten Theil $= 2(20.5)$

§. 181. Jetzt sind uns die Mittel zum Ausziehen der Quadratwurzel bekannt, wir wollen nun sehen, wie wir dieselben anzuwenden haben. Vorher ist noch zu merken, daß $\sqrt{}$ das übliche Zeichen dieser arithmetischen Operation ist. $\sqrt{}$ ist ein verzogenes lateinisches r, der Anfangsbuchstabe von dem lateinischen Worte radix, die Wurzel. — Folgendes Täfelchen erleichtert das Auffinden des ersten Theils der Wurzel.

a) Quadratwurzeln 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ,
b) Quadratzahlen 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 ,

9 , 10 , 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80
81 , 100 , 400 , 900 , 1600 , 2500 , 3600 , 4200 , 6400
90 , 100 , 200 , 300 , 400 , 500 , 600
8100 , 10000 , 40000 , 90000 , 160000 , 250000 , 360000
700 , 800 , 900 , 1000 , 2000 , 3000
490000 , 640000 , 810000 , 1000000 , 4000000 , 9000000

u. s. w.

Das Ausziehen der Quadratwurzel geschieht nun nach folgenden, in dem Vorhergehenden begründeten Regeln:

1. Wenn die Quadratzahl aus mehr als zwei Ziffern besteht, so theile man sie von der rechten zur linken Hand hin in Klassen von zwei Ziffern. Ist die Anzahl der Ziffern ungerade, so erhält die letzte Klasse nur eine Ziffer. Daraus ergibt sich nun gleich, wie viel Ziffern die Wurzel enthält.

2. Man suche in dem gegebenen Täfelchen a b für die letzte Klasse die ihr entweder genau, oder doch zunächst zukommende Quadratzahl, unter welcher die dazu gehörige Wurzel steht. Hinter diese setze man so viel Nullen, als noch Klassen übrig sind.

3. Man subtrahire die Quadratzahl der gefundenen Wurzel von der gegebenen Quadratzahl.

4. Man nehme die gefundene Wurzel doppelt, sehe diese Summe als Divisor an, mit welchem man in den Rest bei Nr. 3 dividirt. Der Quotient gibt die zweite Wurzelziffer, an welche man so viel Nullen setzt, als noch Wurzelstellen übrig sind.

5. Man multiplicire jenen Divisor bei Nr. 4 mit der gefundenen neuen Wurzelzahl, und subtrahire dieses Produkt von jenem Rest der gegebenen Quadratzahl.

6. Man subtrahire von dem zweiten Rest die Quadratzahl von dem gefundenen zweiten Wurzeltheile.

7. Sind nun noch Wurzeltheile, so sehe man die zwei gefundenen Wurzelzahlen als den ersten Theil der zu findenden Quadratwurzel an, nehme diese doppelt und verfahre dann wieder wie bei Nr. 4.

1. Beispiel. $\sqrt{}$ 33'17'76 = 500

	500 =	25 00 00		
500 + 500 =	1000 :	8 17 76	=	70
70 . 1000 =		7 00 00		
		1 17 76		
70^2 =		49 00		
570 + 570 =	1140	68 76	=	6
6 . 1140 =		68 40		
		36		
6^2 =		36		

Kürzer: $\sqrt{}$ 33'17'76 = 576

	5^2 =	25	
5 + 5 =	10 :	817	d. h. 10 : 81
		70	
	7^2 =	49	
		749	subtr. von 817.
57 + 57 =	114 :	6876	: d. h. 114 : 687.
114 . 6 =		684	
	6^2 =	36	
		6876	
		0000	

1. Anmerkung. Beim Aufsuchen des zweiten Wurzeltheils (70) wird der Schüler statt 70 gewiß 80 nehmen, weil 100 : 81776 wirklich 80 mal enthalten ist. Der Lehrer verhindere dieß nicht, damit der Schüler selbst die Erfahrung mache, daß man diesen Quotienten stets mit Hinsicht auf die folgende Operation bestimmen müsse.

2. Anmerkung. Es ist recht absichtlich geschehen, daß den ersten Wurzeltheilen immer so viel Nullen hinzugefügt worden sind, als noch Wurzelstellen übrig wären. Weiterhin wird der Schüler leicht einsehen, daß man diese Nullen weglassen kann, wie es ja auch beim Dividiren in ganzen Zahlen geschieht. Durch diesen Gebrauch der Nullen lernt er dann auch zugleich das richtige Untereinanderstellen der einzelnen Produkte, die sich bei der Operation ergeben, welches sonst den Schüler leicht verwirrt und stört. Ich möchte dem Lehrer rathen, erst dann die Nullen wegzulassen, wenn sich der Schüler dieses weitläufigeren Verfahrens ganz bemeistert hat. Noch dringender ist diese Methode beim Ausziehen der Kubikwurzel anzurathen.

3. Anmerkung. Wenn der Schüler mit dem Buchstabenrechnen bekannt ist, so mag ihm der Lehrer die binomische Formel $a^2 + 2ab + b^2$ zur Richtschnur beim Ausziehen der Quadratwurzel geben. Es versteht sich von selbst, daß der Schüler diese Formel durch Erheben von a + b aufs Quadrat erzeugt. —

2. Beispiel. $\sqrt{}$ 11'94'39'36 = 3000

$3000^2 = 9\,00\,00\,00$

$3000 + 3000 = 6000 : 2\,94\,39\,36 = 400$

$6000 \cdot 400 = 2\,40\,00\,00$

$54\,39\,36$

$400^2 = 16\,00\,00$

$3400 + 3400 = 6800 : 38\,39\,36 = 50$

$6800 \cdot 50 = 34\,00\,00$

$4\,39\,36$

$50^2 = 25\,00$

$3450 + 3450 = 6900 : 4\,14\,36$

$6900 \cdot 6 = 4\,14\,00$

36

$6^2 = 36 = 6$

$\sqrt{}$ 11943936 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 3456.

Kürzer: $\sqrt{}$ 11'94'39'36 = 3456

$3^2 = 9$

$3 + 3 = 6 : 294$ d. h. $6 : 29 = 4$

$6 \cdot 4 = 24$

$4^2 = 16$

256 subtr. von 294

$34 + 34 = 68 : 3839$ d. h. 68 in 383 = 5

$68 \cdot 5 = 340$

$5^2 = 25$

3425 subtr. von 3839.

$345 + 345 = 690 : 41436$ d. h. $690 : 4143 = 6$

$690 \cdot 6 = 4140$

$6^2 = 36$

41436

00000

3. Beispiel. $\sqrt{}$ 50'12'64 = 700

$700^2 = 49\,00\,00$

$700 + 700 = 1400 : 1\,12\,64 = 8$

$1400 \cdot 8 = 1\,12\,00$

64

$8^2 = 64$

00

Kürzer: $\sqrt{}$ 50'12'64 = 708

49

$7 + 7 = 14 : 112$ d. h. $14 : 11 = 0$

$70 + 70 = 140 : 11264$ d. h. $140 : 1126 = 8$.

$140 \cdot 8 = 1120$

$8^2 = 64$

11264

00000

Noch kürzer ist folgendes Verfahren:

$\sqrt{}\ 11'94'39'36 = 3456$

9

294

$3 + 3 = 64$ d. h. $6 : 29 = 4$

$64 \cdot 4 = 256$

3839

$34 + 34 = 6836$ d. h. $68 : 383 = 5$

3425

41436

$345 + 345 = 6906$ d. h. $690 : 4143 = 6$

41436

00000

$\sqrt{}\ 50'12'64 = 708$

49

11264

1408

11264

00000

Anmerkung. Der Lehrer vergesse nicht, anfänglich immer nachzuweisen, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel jene drei Produkte wieder zum Vorschein kommen, aus welchen vorher die Quadratzahlen konstruirt wurden.

7) Aus folgenden Quadratzahlen soll die Quadratwurzel gezogen werden: 3249 (= 57); 92416 (= 304); 459684 (= 678); 62330756 (= 7234); 3184909225 (= 56435).

a. Quadratwurzeln in Brüchen $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$

b. Die dazu gehörigen Quadratzahlen $^1/_4$, $^1/_9$, $^1/_{16}$, $^1/_{25}$, $^1/_{36}$, $^1/_{49}$, $^1/_{64}$, $^1/_{81}$, $^1/_{100}$

a. $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$, $^6/_7$, $^7/_8$, $^8/_9$, $^9/_{10}$

b. $^4/_9$, $^9/_{16}$, $^{16}/_{25}$, $^{25}/_{36}$, $^{36}/_{49}$, $^{49}/_{64}$, $^{64}/_{81}$, $^{81}/_{100}$

Der Augenschein lehrt, daß man, um die Quadratzahl eines Bruches zu erhalten, sowol den Zähler als den Nenner desselben quadriren müsse. Daraus ergibt sich aber ferner, daß man sowol aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Quadratwurzel ziehen muß, wenn man aus einer gebrochenen Quadratzahl die Wurzel wissen will.

Z. B. $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = {}^5/_6$.

8) $\sqrt{\frac{49}{729}}$ $(= {}^7/_{27})$; $\sqrt{\frac{576}{1225}}\left(= \frac{24}{35}\right)$; $\sqrt{\frac{529}{1444}}\left(= \frac{23}{38}\right)$;

$\sqrt{\frac{48841}{65536}}\left(= \frac{221}{256}\right)$.

Anmerkung. Die Quadratzahl von 1 ist 1; jeder ächte Bruch ist aber kleiner als 1, daher muß auch die Quadratzahl jedes ächten Bruches kleiner als 1, mithin wieder ein ächter Bruch sein.

§. 182. Schreibt man unter die natürliche Zahlenreihe die dazu gehörigen Quadratzahlen, so findet man, daß in letzterer Reihe viele Zahlen fehlen, zu welchen sich in der obern Reihe die Wurzeln nicht vorfinden. Z. B.

a. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 u. s. w.
b. 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 u. s. w.

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; was ergibt sich aber für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{}$ (5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14 u. s. w.)? Die Quadratwurzeln der, zwischen 9 und 16 liegenden ganzen Zahlen sind größer als 3 und kleiner als 4, folglich 3 nebst einem Bruche, welche gemischte Zahl aber die Wurzel auch nicht vollkommen darstellt. Wenn die Wurzel nicht als ganze Zahl erscheint, so kann sie auch nicht durch Brüche vollkommen zusammengesetzt werden. Wäre dieß der Fall, so würde man durch Quadrirung wieder eine Quadratzahl mit rationaler Wurzel erhalten. — Wenn von einer Quadratzahl die Wurzel weder in ganzen Zahlen noch durch Brüche vollkommen dargestellt werden kann, so nennt man sie unmeßbar, irrational oder incommensurabel, so wie im Gegentheil meßbar, rational, commensurabel, wenn sich die Wurzel vollkommen in ganzen oder gebrochenen Zahlen darstellen läßt. Obgleich es nun unmöglich ist, eine irrationale Wurzel ganz genau darzustellen, so kann man ihrem wahren Werthe doch so nahe kommen, daß in der Anwendung das Mangelnde nicht merkbar ist.

Anmerkung. Geometrisch läßt sich aber eine irrationale Wurzel vollkommen darstellen. S. unser 3. Uebungsbuch, 11. Abschnitt, die Aufgaben 12, 13, 14, 15.

§. 183. Soll aus einer Quadratzahl mit irrationaler Wurzel die Wurzel gezogen werden, so verwandelt man jene in einen beliebigen unächten Bruch mit rationaler Wurzel. Z. B. $\sqrt{5} = \sqrt{5/1} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{9 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{45}{9}}$ oder $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5 \cdot 16}{16}} = \sqrt{\frac{80}{16}}$ oder $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5 \cdot 100}{100}} = \sqrt{\frac{500}{100}}$. Nun zieht man zuerst die Wurzel aus dem Zähler, wobei der sich ergebende Rest weggeworfen wird, dann aus dem Nenner. Der Bruch, welcher daraus entsteht, ist die Quadratwurzel. Z. B. $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{45}{9}} = \frac{6}{3} = 2$; $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5.16}{16}} = \sqrt{\frac{80}{16}} = \frac{8}{4} = 2$ oder sehr nahe $2\frac{1}{4}$, denn $\frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} = 2\frac{1}{4}$; $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5 \cdot 100}{100}} = \sqrt{\frac{500}{100}} = \frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$.

Die Wurzel $2\frac{1}{4}$ ist um $\frac{1}{16}$ zu groß, denn $(2\frac{1}{4})^2 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$; die Wurzel $2\frac{1}{5}$ ist aber um $\frac{6}{25}$ zu klein, denn $(2\frac{1}{5})^2 = \frac{121}{25}$

$= 4^{21}/_{25}$; $^1/_{16} = ^{25}/_{400}$, $^4/_{25} = ^{64}/_{400}$. Man fehlt also bei $2^1/_4$ weniger als bei $2^1/_5$. Das arithmetische Mittel zwischen $2^1/_4$ und $2^1/_5 = \frac{2^1/_4 + 2^1/_5}{2} = 2^9/_{40}$, davon die Quadratzahl $= ^{7921}/_{1600} = 3^{1521}/_{1600}$ oder nahe $4^{1520}/_{1600} = 4^{380}/_{400} = 4^{19}/_{20}$, wo noch $^1/_{20}$ fehlt. Nimmt man statt $\gamma\ 5$, $\gamma\ \frac{5\ .\ 10000}{10000}$, so erhält man $\gamma\ ^{50000}/_{10000} = ^{23}/_{100}$ $= 2^{23}/_{100}$, welches der Wahrheit noch näher kommt als $2^1/_4$, denn: $(2^{23}/_{100})^2 = ^{49729}/_{10000} = 4^{9729}/_{10000}$, welches weniger von 5 unterschieden ist, als $5^1/_{16}$.

Es ergibt sich hieraus, daß man in der Regel dem wahren Werthe der Wurzel um so näher kommt, je größer man den rationalen Nenner nimmt. In der Regel; denn $\gamma\ 5 = 2$; $\gamma\ ^{45}/_9 = ^6/_3 = 2$; $\gamma\ ^{80}/_{16}$ $= ^8/_4 = 2$, jedesmal erhält man 2 als Wurzel, obgleich der Nenner immer größer angenommen wurde. Ja ein größerer Nenner gibt bisweilen eine kleinere, von dem wahren Wurzelwerthe mehr abweichende Wurzel, als ein kleinerer. Z. B.

a.	$\gamma\ 7 = 2$	f.	$\gamma\ ^{242}/_{36} = ^{15}/_6 = 2^1/_2$
b.	$\gamma\ ^{28}/_{16} = ^5/_2 = 2^1/_2$	g.	$\gamma\ ^{343}/_{49} = ^{18}/_7 = 2^4/_7$
c.	$\gamma\ ^{63}/_9 = ^7/_3 = 2^1/_3$	h.	$\gamma\ ^{448}/_{64} = ^{21}/_8 = 2^5/_8$
d.	$\gamma\ ^{112}/_{16} = ^{10}/_4 = 2^1/_2$	i.	$\gamma\ ^{567}/_{81} = ^{23}/_9 = 2^5/_9$
e.	$\gamma\ ^{175}/_{13} = ^{13}/_5 = 2^3/_5$	k.	$\gamma\ ^{700}/_{100} = ^{26}/_{10} = 2^3/_5$

Alle diese verschiedenen Wurzeln von 7 sind gegen die wahre Wurzel zu klein, die größte kommt daher der Wahrheit am nächsten. a gibt die kleinste Wurzel 2; b, d, f geben $2^1/_2$; die Wurzeln bei e und k sind einander gleich, nämlich $2^3/_5$; h gibt $2^5/_8$ und kommt daher der Wurzel am nächsten; $(2^5/_8)^2 = 6^{57}/_{64} = 6{,}9$.

Anmerkung für Geförderetere. Wenn man mit n^2 eine Quadratzahl mit rationaler Wurzel (n) bezeichnet, so ist die Wurzel von $n^2 + 1$, d. i. $\gamma\ (n^2 + 1)$ irrational. Nimmt man aber $n + 1$ doch für die Wurzel von $n^2 + 1$ an, so würde sie zu groß sein, denn $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Vermehrt man also die Wurzel n um 1, so gibt das schon einen Unterschied für die beiden Quadratzahlen von $2n + 1$. Die wahre Wurzel liegt demnach zwischen n und $n + 1$, muß also $= n +$ einem ächten Bruche sein. Wenn wir nun nach dem Regeldetrisatze schließen: $2n + 1 : 1 = 1 : x$, (d. h.: für den Zusatz $2n + 1$ zu der Quadratzahl n^2 ergibt sich erst ein Unterschied von 1 in der Wurzel, wie groß wird dieser Wurzelunterschied von dem Zusatze 1 zu der Quadratzahl n sein), so erhalten wir für $x = \frac{1 \times 1}{2n + 1} = \frac{1}{2n + 1}$ als Wurzelzusatz für jede Einheit, um welche eine Quadratzahl mit rationaler Wurzel bis zur nächstfolgenden vermehrt wird. Zwischen den beiden rationalen Quadratzahlen 16 und 25 liegen die irrationalen von 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 und 24. Wir können nun durch die Wurzelzusätze von $\frac{1}{2n + 1}$, $\frac{2}{2n + 1}$, $\frac{3}{2n + 1}$ u. s. w. zu der nächstvorhergehenden rationalen Wurzel zu einer Genauigkeit für die Wurzeln von den Zahlen 17, 18, 19 u. s. w. gelangen, welche gewiß für das bürgerliche Geschäftsleben nur in seltenen Fällen dem Bedürfniß nicht genug entspricht. Beispiel.

$$\sqrt{n^2} = n;\quad \sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n+1}$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{2 \cdot 4 + 1} = 4\tfrac{1}{9};\ (4\tfrac{1}{9})^2 = 16\tfrac{9}{81},$$

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{2 \cdot 4 + 1} = 4\tfrac{2}{9};\ (4\tfrac{2}{9})^2 = 17\tfrac{17}{81},$$

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{3}{2 \cdot 4 + 1} = 4\tfrac{3}{9};\ (4\tfrac{3}{9})^2 = 18\tfrac{9}{81},$$

$$\sqrt{20} = 4 + \frac{4}{2 \cdot 4 + 1} = 4\tfrac{4}{9};\ (4\tfrac{4}{9})^2 = 19\tfrac{17}{81},$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sqrt{24} = 4 + \frac{8}{2 \cdot 4 + 1} = 4\tfrac{8}{9};\ (4\tfrac{8}{9})^2 = 23\tfrac{17}{81},$$

Differenz d. Quadratzahl: $\frac{9}{81}$, $\frac{17}{81}$, $\frac{9}{81}$ ob. $\frac{1}{9}$, $\frac{17}{81}$, $\frac{1}{81}$

§. 184. Im vorigen §. verwandelten wir bei b die Quadratzahl 7 in Viertel, und wir erhielten nun die Wurzel in Halben; bei c wurde die Quadratzahl in Neunteln dargestellt, und die Wurzel ergab sich in Dritteln; bei k enthielt die Quadratzahl Hundertel und die Wurzel Zehntel. Wir können nun auch umgekehrt schließen: Verlangt man die Quadratwurzel in:

Halben,	so verwandle man die Quadratzahl in	Viertel
Dritteln,	" " " " "	Neuntel
Vierteln,	" " " " "	Sechszehntel
Fünfteln,	" " " " "	25stel
Sechsteln,	" " " " "	36stel
Siebenteln,	" " " " "	49stel
Achteln,	" " " " "	64stel
Neunteln,	" " " " "	81stel
Zehnteln,	" " " " "	100tel.

Gewöhnlich wird die Quadratzahl in Zehnteln, Hunderteln oder Tausendteln dargestellt. Im ersten Falle hängt man beim Wurzelausziehen an den letzten Rest zwei Nullen, im zweiten vier, im dritten Falle sechs Nullen, d. h. man multiplicirt den letzten Rest mit 100 oder 10000 oder 1000000. Hinter die bereits gefundene Wurzelzahl wird ein Decimalkomma gesetzt, und mit dem Ausziehen der Quadratwurzel auf die gewöhnliche Weise fortgefahren. Anstatt den letzten Rest mit 10000 oder 1000000 auf einmal zu multipliciren, kann man auch vor und nach für jede neue noch zu suchende Wurzelziffer dem Rest zwei Nullen anhängen, wie es denn auch gewöhnlich so geschieht. Die erste neue Wurzelziffer nach dem Komma bezeichnet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Ziffer Tausendtel u. s. f. — Beispiel.

$\sqrt{39} = 6{,}245$

$6^2 = 36$

$6 + 6 = 12 : 3{,}00 = 2$

$12 \cdot 2 = 24$

$2^2 = 4$

244

$62 + 62 = 124 : 56{,}00 = 4$

$124 \cdot 4 = 496$

$4^2 = 16$

4976

$624 + 624 = 1248 : 624{,}00 = 5$ sehr nahe

$1248 \cdot 5 = 6240$

$5^2 = 25$

62425

$\sqrt{15} = 3{,}87$

9

600

68

544

$56{,}00$

767

$53{,}69$

231

Probe $3{,}87$ } multipl.
$3{,}87$ }

$14{,}9769$

Dazu obiger Rest 231

$15{,}0000 = 15.$

9) Aus folgenden Zahlen soll die Quadratzahl gezogen und der Bruch in Halben, Vierteln, Fünfteln, ... Hunderteln und Tausendteln dargestellt werden: 10, 17, 232, 596, 1289 $\sqrt{10} = 3$; $\sqrt{10} = 3{,}1\ldots$; $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$; $\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ $\sqrt{1289}$; $= 35, \ldots$; $\sqrt{1289} = 35{,}9\ldots$; $\sqrt{1289} = 35{,}90\ldots$; $\sqrt{1289} = 35{,}902$.

§. 185. Verlangt man die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche, von welchem Zähler und Nenner oder doch einer von beiden keine rationale Wurzel haben, so verfährt man am besten, wenn man den Bruch in einen Decimalbruch mit rationaler Wurzel verwandelt. Wird die Quadratwurzel aus einer gemischten Zahl gefordert, so verwandle man diese in einen beliebigen, oder besser in einen Decimalbruch mit rationaler Wurzel, und verfahre dann wie gewöhnlich.

Beispiel.

$\sqrt{\frac{6}{7}} = \sqrt{0{,}71} = \sqrt{\frac{71}{100}} = \frac{8}{10}$, oder $\sqrt{0{,}71} = 0{,}8$

$\sqrt{3\frac{3}{4}} = \sqrt{3{,}75} = \sqrt{\frac{375}{1000}} = \frac{19}{10} = 1{,}9$

oder $\sqrt{3{,}75} = 1{,}9$; $\sqrt{7\frac{5}{6}} = \sqrt{7{,}8333} = 2{,}79$

1

$2{,}75$

29

261

4

383

47

329

5433

349

4941

Aus dem letzten Beispiele ist zu ersehen, daß der Decimalbruch einer Quadratzahl seine eigene, besondere Klasseneintheilung hat und von der linken zur rechten Hand hin vorgenommen wird. Die Eintheilung $\sqrt{7{,}8'33}$ oder $\sqrt{7{,}'8'33}$ ist falsch. Da nämlich die erste Decimalstelle Zehntel enthält, so muß die Quadratzahl derselben Hundertel enthalten. Um also die Quadratwurzel in Zehnteln zu erhalten, muß man die zwei ersten Decimalstellen, nämlich die Zehntel und Hundertel in eine Abthei-

lung für die Wurzelzehntel bringen. Da ein Decimalbruch seinen Werth nicht ändert, wenn man rechtshin Nullen ansetzt, so kann man, wenn die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist, leicht eine Null hinzufügen, damit die letzte Abtheilung auch zwei Stellen erhält. Also: für γ 13,795 setze man γ 13,7950 = γ 13,79'50; ferner: γ 536,785 = γ 5'36,78'50; — γ 0,00735 = γ 0,00'73'50.

10) $\gamma\ {}^{16}/_{21} = \gamma\ \frac{16}{21,00} = \frac{4}{4,6} = \frac{40}{46} = \frac{20}{23}$, oder $\gamma\ \frac{16}{21} = \frac{4}{\gamma 21}$; $\gamma\ \frac{6}{7} = \gamma\ \frac{6,00}{7,00} = \frac{2,4}{2,6} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$, oder $\gamma\ {}^{6}/_{7} = \gamma\ \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{\gamma 42}{7} = \frac{6,48}{7}$, oder $\gamma\ {}^{6}/_{7} = \gamma\ \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{6}{\gamma 42}$; γ 8,765; γ 39,869 = γ 39,86'90; $\gamma\ {}^{1}/_{9} = \gamma\ \frac{7,00}{9} = \frac{2,6}{3} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$ oder $\gamma\ {}^{1}/_{9} = \frac{\gamma 7}{3} = {}^{1}/_{3}\ \gamma 7$; $\gamma\ \frac{13}{16} = \gamma\ \frac{13,00}{16} = \frac{3,4}{4} = \frac{34}{40} = \frac{17}{20}$ oder $\gamma\ \frac{13}{16} = \frac{\gamma 13}{4} = {}^{1}/_{4}\ \gamma 13$; $\gamma\ 4{}^{5}/_{8} = \gamma$ 4,62 = 2,15 sehr nahe $\gamma\ 27{}^{2}/_{3} = \gamma$ 27,67 = 5,26 sehr nahe...

Wenn sowol der Zähler als der Nenner eines gewöhnlichen Bruches keine rationale Wurzel hat, so kann man mit Vortheil vorher beide mit dem Nenner des Bruches multipliciren (s. §. 92 der ersten Abth.) und dann die Quadratwurzel ausziehen. Der Bruch erhält auf diese Weise einen rationalen Nenner. Beispiel. $\gamma\ \frac{5}{7} = \gamma\ \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \gamma\ \frac{35}{49} = \frac{\gamma 35}{\gamma 49} = \frac{\gamma 35}{7} = \frac{5,916}{7} = 0,8$ oder genauer = 0,845. Ferner $\gamma\ {}^{5}/_{6} = \gamma\ \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \gamma\ \frac{30}{36} = \frac{\gamma 30}{6} = \frac{5,477}{6} = 0,9128$. Man könnte auch auf gleiche Weise mit dem Zähler verfahren und Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit dem Zähler multipliciren, wodurch dann der Zähler eine rationale Wurzel erhielt. Beispiel. $\gamma\ \frac{5}{7} = \gamma\ \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \gamma\ \frac{25}{35} = \frac{\gamma 25}{\gamma 35} = \frac{5}{\gamma 35} = \frac{5}{5,916} = 0,8$ oder genauer = 0,845 wie vorher.

Wenn bloß der Zähler oder Nenner eines gewöhnlichen Bruches eine rationale Wurzel hat, so kann man diese ausziehen und dem Werthe von der Wurzel des Zählers oder Nenners durch Hinzufügung einer beliebigen Anzahl von Decimalstellen nahe zu kommen suchen. Beispiel. $\gamma\ \frac{25}{63} = \frac{\gamma 25}{\gamma 63} = \frac{5}{\gamma 63} = \frac{5}{7,9327...} = 0,6299...$ oder $\gamma\ \frac{41}{49} = \frac{\gamma 41}{\gamma 49} = \frac{\gamma 41}{7} = \frac{6,403}{7} = 0,9147.$

§. 186. Das Produkt der Quadratwurzeln aus den rationalen Faktoren einer Quadratzahl ist gleich der Quadratwurzel aus der Quadratzahl selbst. Z. B. $\sqrt{576} = 24$; $\sqrt{576} = \sqrt{(64 . 9)} = 8 . 3 = 24$, oder $\sqrt{576} = \sqrt{(144 . 3)} = 12 . 2 = 24$ oder $576 = 4 . 9 . 16$, $\sqrt{576} = \sqrt{(4 . 9 . 16)} = 2 . 3 . 4 = 24$.

Wer mit Wurzelgrößen zu rechnen versteht, der kann aus einer Quadratzahl mit irrationaler Wurzel einen rationalen Faktor herausheben, aus welchem er dann die Quadratwurzel nimmt und diese mit dem andern Faktor vermittelst des Wurzelzeichens verbindet. Z. B. $\sqrt{72} = \sqrt{8 . 9} = 3\sqrt{8}$; $\sqrt{336} = \sqrt{16 . 21} = 4\sqrt{21}$; $\sqrt{175} = \sqrt{25 . 7} = 5\sqrt{7}$; $\sqrt{1053} = \sqrt{81 . 13} = 9\sqrt{13}$; $\sqrt{3564} = \sqrt{324 . 11} = 18\sqrt{11}$; $\sqrt{7935} = \sqrt{529 . 15} = 23\sqrt{15}$.

§. 187. Die Quadratwurzel jeder positiven Quadratzahl hat zwei Werthe, einen positiven und einen negativen. $\sqrt{49}$ ist sowol $+ 7$ als auch $- 7$; denn $+ 7$ mal $+ 7 = + 49$, und $- 7$ mal $- 7$ ist ebenfalls $+ 49$. (Siehe §. 143 u. 144.)

Es ist aber unmöglich, die Quadratwurzel von $- 49$ darzustellen; sie kann weder $+ 7$ noch $- 7$ sein, weil sowol $+ 7$ mal $+ 7$ als auch $- 7$ mal $- 7 = + 49$ sind. Die Darstellung $\sqrt{-49} = \sqrt{(49 . -1)} = 7\sqrt{-1}$ ist eben so wenig aushelfend. Man nennt deshalb $\sqrt{-49}$ und ähnliche Ausdrücke unmögliche oder imaginäre (eingebildete) Zahlen.

1. Anmerkung. Die Summe jeder beliebig fortgesetzten mit 1 anfangenden Reihe der regelmäßig auf einander folgenden ungeraden Zahlen bildet Quadratzahlen mit rationaler Wurzel, oder kürzer: Die Summe einer arithmetischen Reihe, von welcher das erste Glied = 1, die Differenz = 2 und die Anzahl der Glieder beliebig ist, bildet jedesmal eine Quadratwurzel mit rationaler Wurzel. Z. B.

$$1 + 3 = 4; \sqrt{4} = 2$$
$$1 + 3 + 5 = 9; \sqrt{9} = 3$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16; \sqrt{16} = 4$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25; \sqrt{25} = 5$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36; \sqrt{36} = 6$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49; \sqrt{49} = 7 \text{ u. s. w.}$$

2. Anmerkung. Die Quadratwurzel aus einem Produkte mit zwei rationalen Faktoren ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen diesen Faktoren:

$$64 = 4 . 16; \sqrt{64} = 8; 4 : 8 = 8 : 16$$
$$36 = 9 . 4; \sqrt{36} = 6; 4 : 6 = 6 : 9$$

3. Anmerkung. Wenn eine geometrische Proportion aus Gliedern mit rationalen Quadratwurzeln besteht, so bilden diese Wurzelzahlen wieder eine geometrische Proportion, in welcher der Exponent gleich ist der Quadratwurzel aus dem Exponent der gegebenen Proportion.

a) $9 : 36 = 16 : 64$

$\sqrt{9} : \sqrt{36} = \sqrt{16} : \sqrt{64}$

$3 : 6 = 4 : 8$

b) $9 : 81 = 4 : 36$

$9 : \sqrt{81} = \sqrt{4} : \sqrt{36}$

$3 : 9 = 2 : 6$

Der Exponent der gegebenen Proportion a ist 4, und $\sqrt{4} = 2$ ist der Exponent der Proportion $3 : 6 = 4 : 8$. Bei b ist der Exponent 9; $\sqrt{9} = 3$ ist der Exponent der aus b hervorgebrachten Proportion.

Drei und zwanzigster Abschnitt.

Vom Ausziehen der Kubikwurzel.

Vorbemerkung. Das Ausziehen der Kubikwurzel ist ein, noch bei weitem verwickelteres und schwierigeres Geschäft, als das Ausziehen der Quadratwurzel. In vielen, ja in den meisten Fällen ist es gerathener, zuerst durch fleißige Uebung sich des mechanischen Verfahrens zu versichern, und dann nachher die ganze Operation zu begründen, als den entgegengesetzten Weg einzuschlagen. Also durch die Praxis zur Theorie. Ich glaube hierin alle erfahrne Lehrer auf meiner Seite zu haben. Es versteht sich übrigens von selbst, daß nachher, wenn der Schüler im sichern Besitze dieser mechanischen Kunst ist, auch die Gründe klar und vollständig dargelegt werden müssen. Uebrigens gilt hier dasselbe, was in der Vorbemerkung zum vorigen Abschnitt gesagt worden ist.

§. 188. Ein Produkt aus drei gleichen Faktoren wird eine Kubikzahl oder Würfelzahl genannt; ein Faktor dieses Produkts heißt die Kubikwurzel oder Würfelwurzel. Man kann auch sagen: eine Zahl auf ihrer dritten Potenz heißt eine Kubikzahl, die Zahl selbst, oder die Basis dieser Potenz, wird Kubikwurzel genannt. $3 . 3 . 3 = 3^3 = 27$. Hier ist 3^3 oder 27 die Kubikzahl von 3, und 3 die Kubikwurzel von 27. Das Erheben einer Zahl auf ihren Kubus oder auf die dritte Potenz heißt Kubiren; das Zurückführen einer Kubikzahl auf ihre Wurzel heißt Ausziehen (Extrahiren) der Kubikwurzel.

Anmerkung. Die Benennung Kubikzahl ist wie die Benennung Quadratzahl aus der Geometrie hergenommen. Kubus oder Würfel ist ein gleichseitiger, geometrischer Körper, dessen sechs Seitenflächen eben so viele Quadrate bilden. Der Rauminhalt eines Kubus wird gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe, die hier gleich sind, mit einander multiplicirt. Da nun bei dieser Berechnung dieselbe Zahl dreimal als Faktor gesetzt wird, so wird auch jede Zahl, welche auf eine solche Weise entsteht, Kubikzahl genannt.

§. 189.

1) Aufg. Kubire folgende Zahlen: 3, 7, 9, 10, 12; 24 (= 13824), 36 (= 46656), 456 (94818816).
2) Welches ist die Kubikwurzel von folgenden Kubikzahlen: 8, 27, 64, 125, 216, 729, 1728, 5832?

Anmerkung. Der Schüler muß hier durch Versuche eine Zahl ausfindig machen, die dreimal als Faktor gesetzt, diese Kubikzahlen hervorbringen.

§. 190.

a. Kubikwurzeln	0	1	2	3	4	5	6
b. Kubikzahlen	0	1	8	27	64	125	216
c. Differenzen der Kbz.		1	7	19	37	61	91
d. Differenzen der Differ.			6	12	18	24	30	36
a.	7	8	9	10			
b.	343	512	729	1000			
c.	127	169	217	271			
d.	42	48	54				

Die Reihe d kann auch auf folgende Weise dargestellt werden:

d. 1 . 6, 2 . 6, 3 . 6, 4 . 6, 5 . 6, 6 . 6, 7 . 6, 8 . 6, 9 . 6

Die Reihe $c = 1, 1 + 1 . 6 (= 7), 7 + 2 . 6 (= 19), 19 + 3 . 9 (= 37), 37 + 4 . 6 (= 61), 61 + 5 . 6 (91)$ u. s. w.

Die Reihe b läßt sich aus den Reihen c und d konstruiren:

m	n	p	q	b
0 +	0 . 6 +	1 =	0 . 6 + 1 + 0 =	1
1 +	1 . 6 +	1 =	1 . 6 + 2 =	8
8 +	3 . 6 +	1 =	4 . 6 + 3 =	27
27 +	6 . 6 +	1 =	10 . 6 + 4 =	64
64 +	10 . 6 +	1 =	20 . 6 + 5 =	125
125 +	15 . 6 +	1 =	35 . 6 + 6 =	216
216 +	21 . 6 +	1 =	56 . 6 + 7 =	343 u. s. w.

Schreibt man unter die Reihe n die Differenz der Zahlen, so hat man:

0 . 6, 1 . 6, 3 . 6, 6 . 6, 10 . 6, 15 . 6, 21 . 6 u. s. w.
Differ. 1 . 6, 2 . 6, 3 . 6, 4 . 6, 5 . 6, 6 . 6 u. s. w.

Hier zeigt der Coefficient von 6 in der Differenzreihe d die Kubikwurzel von der ihm korrespondirenden Kubikzahl an, z. B. zu 5 . 6 gehört die Kubikzahl 125, von welcher 5 die Wurzel sein muß. Auch die Reihe q zeigt die Kubikwurzel an.

Anmerkung. Diese letztern Darstellungen stehen für geförderte Schüler bei einer etwaigen Wiederholung da, und zwar hauptsächlich, um den Schüler zur Einsicht zu leiten, daß sowol in der Verstandeswelt, hier im Zahlengebiet, als in der äußern materiellen Welt, Alles verborgenen, aber bestimmten Gesetzen unterworfen ist.

§. 191. Da das Ausziehen der Kubikwurzel die entgegengesetzte Operation vom Kubiren oder dem Erheben einer Zahl auf ihre dritte Potenz ist, und dieß letztere weiter nichts als Kenntniß des Multiplicirens erfordert, so wollen wir mit dem Kubiren beginnen und zusehen, wie sich die Kubikzahl aus der Kubikwurzel bildet. Aus der Konstruktion der Kubikzahl werden sich dann die Regeln ergeben, welche beim Ausziehen der Kubikwurzel beobachtet werden müssen. Wie im vorigen Abschnitt beim Ausziehen der Quadratwurzel, wollen wir mit einem Binomium den Anfang machen, und die sich ergebenden Produkte durch ihre Faktoren andeuten.

$7 = 4 + 3 \quad 4 + 3$

$7^3 = (4 + 3)^3 \quad 4 + 3$

$4 \;.\; 4 + 3 \;.\; 4$

$7^3 = 7 \;.\; 7 \;.\; 7 \;. \qquad 3 \;.\; 4 + 3 \;.\; 3$

$= 7 \;.\; 49 = 343 \quad 4^2 + 2\,(3 \;.\; 4) + 3^2$

$4 + 3$

$4 \;.\; 4^2 + 2\,(3 \;.\; 4^2) + 3^2 \;.\; 4$

$3 \;.\; 4^2 + 2\,(3^2 \;.\; 4) + 3 \;.\; 3^2$

$4^3 + 3\,(3 \;.\; 4^2) + 3\,(3^2 \;.\; 4) + 3^2$

$64 + 144 + 108 + 27$

$= 7^3 = 343.$

Betrachten wir diese Produkte mit Aufmerksamkeit, so ergeben sich als Bestandtheile der Kubikzahl eines Binomiums folgende wesentliche Stücke: sie besteht

a. aus dem Kubus des ersten Theils (4^3);

Digitized by Google

b. aus dem dreifachen Produkt der Quadratzahl des ersten Theils in den zweiten Theil. $3\,(4^2 \,.\, 3.)$

c. aus dem dreifachen Produkt des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils $3\,(4 \,.\, 3^2)$.

d. aus dem Kubus des zweiten Theils (3^3).

Da man jede Zahl als ein Binomium darstellen kann, so gilt diese Konstruktion einer Kubikzahl allgemein.

$234 = 230 + 4$

$234^3 = (230 + 4)^3$

$230 + 4$

$230 + 4$

$230^2 + 4 \,.\, 230$

$4 \,.\, 230 + 4^2$

$230^2 + 2\,(4 \,.\, 230) + 4^2$

$230 + 4$

$230^3 + 3\,(4 \,.\, 230^2) + 230 \,.\, 4^2$

$4 \,.\, 230^2 + 2\,(4^2 \,.\, 230) + 4^3$

$230^3 + 3\,(4 \,.\, 230^2) + 3\,(4^2 \,.\, 230) + 4^3$

Hier ist $a = 230^3$ oder 12167000

$b = 3\,(4 \,.\, 230^2)$ oder 634800

$c = 3\,(4^2 \,.\, 230)$ oder 11030

$d = 4^3$ oder 64

$234^3 = 12812904$

Anmerkung. Der Lehrer thut wol, sich eine Menge hölzerner Würfel, wenigstens 125 $(= 5^3)$ machen zu lassen. Hiermit kann er die eben angemerkte Konstruktion einer Kubikzahl recht anschaulich darstellen. Gesetzt, er hätte einen Kubus zusammengestellt, an welchem jede Seite 3 Würfel zählte, und er wollte denselben so vergrößern, daß nach jeder Seite hin 5 Würfel zu liegen kämen, so würde ihn recht bald der Augenschein lehren, daß die oben genannten Produkte zur Zusammensetzung des zu vergrößernden Würfels durchaus nothwendig wären. Der Lehrer versäume nicht, auf diese Weise einen Würfel vor den Augen des Schülers entstehen zu lassen. Wenn die Schüler in der Buchstabenrechenkunst bewandert sind, so müssen sie angehalten werden, die vorher genannten Bestandtheile einer Kubikzahl durch Buchstaben darzustellen, nämlich: $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3$.

§. 192. Ehe wir zum Ausziehen der Kubikwurzel übergehen, müssen wir, wie in dem vorigen Abschnitt bei der Quadratzahl, hier die Klassen-eintheilung der Kubikzahl kennen lernen. Wir nehmen zu dem Ende den niedrigsten und höchsten Einer der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Zahlordnung als Wurzel und sehen zu, wie viel Stellen jede dieser Zahlordnungen im Kubus enthält.

a	Der kl. Einer ist			1,	der Kubus davon	=	1	eine Zif.
b	» gr. » »			9	» » »	=	729	drei »
c	» kl. Zehn.	= 1 =	10		» » »	=	1000	vier »
d	» gr. »	= 9 =	90		» » »	=	729000	sechs »
e	» kl. Hund.	1 =	100		» » »	=	1000000	sieben »
f	» gr. »	9 =	900	Einer	» » »	=	729000000	neun »
g	» kl. Tauf.	= 1 =	1000		» » »	=	1000000000	zehn »
h	» gr. »	= 9 =	9000		» » »	=	729000000000	zwölf »
								u. s. w.

Digitized by Google

Nehmen wir nun noch zwischen dem kleinsten und größten Einer dieser Zahlenordnungen irgend einen mittleren Einer als Wurzel an, so fällt die Ziffernanzahl von dessen Kubus zwischen die Ziffernanzahl obiger Kubikzahlen, z. B. zwischen a und b fällt die Wurzel 4, von welcher der Kubus $= 4 . 4 . 4 = 64$ nur 2 Ziffern enthält; zwischen c und d fällt 40, davon ist die Kubikzahl $= 40 . 40 . 40 = 64000$ mit 5 Ziffern; zwischen e und f liegt 400, davon ist der Kubus $= 400 . 400 . 400 = 64000000$ mit 8 Ziffern u. s. w.

Es läßt sich nun aus der Anzahl der Ziffern, welche eine Kubikzahl enthält, bestimmen, aus wie viel Ziffern deren Kubikzahl besteht.

Der Kubus aller Zahlen der Einer-Ordnung enthält	1	oder 2	oder 3	Ziff.
" " " " " Zehner-Ordnung	" 4	" 5	" 6	"
" " " " " Hund.-Ordnung	" 7	" 8	" 9	"
" " " " " Tauf.-Ordnung	" 10	" 11	" 12	"

u. s. w.

Wir können nun auch umgekehrt schließen:

Zu einer	1"	2"	oder	3ziffrigen Kubikzahl gehört eine	1ziffrige Wurzel
" "	4"	5"	" 6	" " "	" 2 " "
" "	7"	8"	" 9	" " "	" 3 " "
" "	10"	11"	" 12	" " "	" 4 " "

u. s. w.

Jede Zahlenordnung, vollständig genommen, nimmt in der Kubikzahl drei Stellen ein. Darauf gründet sich nun die Eintheilung einer Kubikzahl in Klassen von 3 Stellen und zwar, wie bei den Quadratzahlen, von der rechten zur linken Hand hin. Z. B. 457869834 wird als Kubikzahl eingetheilt: 457'869'834; 57386974 wird eingetheilt: 57'386'974; 5978654793 wird eingetheilt: 5'978'654'793.

Da, wie wir eben gesehen haben, in der Kubikzahl jede Klasse 1 oder 2 oder 3 Ziffern haben kann, so liegt darin der Grund, daß die äußerste Klasse links bisweilen nur 2 oder 1 Ziffer enthält. Jede folgende Klasse rechtshin muß aber jedesmal alle 3 Stellen besetzt haben, eben weil die Zahlordnung dieser Wurzelstellen überschritten worden ist.

Anmerkung. Das Zeichen für das Ausziehen der Kubikwurzel ist $\sqrt[3]{\ }$.

§. 193. Wir haben gesehen, wie aus der Kubikwurzel die Kubikzahl entsteht; das Ausziehen der Kubikwurzel ist der Rückweg von der Kubikzahl zu ihrer Wurzel, und es ist dabei unumgänglich nothwendig, jene vorhin dargestellten Produkte als Bestandtheile jeder Kubikzahl wieder zu entwickeln. Zur Erleichterung dieser Arbeit kann folgende Tafel dienen:

a. Kubikwurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8
b. Kubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512

a. Kubikwurzeln	9	10	20	30	40	50
b. Kubikzahlen	729	1000	8000	27000	64000	125000

a. Kubikwurzeln	60	70	80	90
b. Kubikzahlen	216000	343000	512000	729000

Digitized by Google

a. Kubikwurzeln	100 ,	200 ,	300 ,	400
b. Kubikzahlen	1000000 ,	8000000 ,	27000000 ,	64000000
a. Kubikwurzeln	500 ,	600 ,	700	
b. Kubikzahlen	125000000 ,	216000000 ,	343000000	
a. Kubikwurzeln	800 ,	900 ,	1000	
b. Kubikzahlen	512000000 ,	729000000 ,	1000000000	

1. Beispiel. Welches ist die Kubikwurzel aus 110592?

Aufl. Die Zahl hat 6 Ziffern, also wird die Wurzel zweiziffrig sein; mithin Zehner und Einer enthalten. Sie besteht daher (§. 192) 1) aus dem Kubus der Zehner, 2) aus dem 3fachen Produkt des Quadrats der Zehner in die Einer, 3) aus dem 3fachen Produkt der Zehner in das Quadrat der Einer und 4) aus dem Kubus der Einer.

Die Eintheilung $\sqrt[3]{}$ 110'592. In der gegebenen Tafel finden wir als nächste Kubikzahl 6400 mit der Wurzel 40. Nun sind die übrigen Produkte leicht zu finden.

$\sqrt[3]{}$ 110'592 = 40

40^2 = 64 000

$3 . 40^2$. 46 592 = 8

$3 . 40^2 . 8$ = 38 400

8 192

$3 . 40 . 8^2$ = 7 680

512

8^3 = 512

oder: $\sqrt[3]{}$ 110'562 = 40

40^3 = 64 000 | 8

$3 . 40^2$ = 4800 = 46 592

8 . 4800 = 38 400 } addirt.

$3 . 40 . 8^2$ = 7 680 }

8^3 = 512 }

46 592 subtr.

von 46592 00 000

2. Beispiel. $\sqrt[3]{}$ 242'970'624 = 600

600^3 = 216 000 000

$3 . 600^2$ = 1080000 : 26 970 624 = 20

620

$3 . 600^2 . 20$ = 21 600 000 }

$3 . 600 . 20^2$ = 720 000 } addirt.

20^3 = 8 000 }

22 328 000 subtr. von 26970624

$3 . 620^2$ = 1153200 : 4 642 624 = 4

$3 . 620^2 . 4$ = 4 612 800 }

$3 . 620 . 4^2$ = 29 760 } addirt.

4^3 = 64 }

4 642 624 subtr. von 4642624

0 000 000

Also $\sqrt[3]{}$ 242970624 = 620 + 4 = 624.

Die Wurzel dieser Kubikzahl enthält, wie die Eintheilung zeigt, 3 Ziffern, mithin Hunderter, Zehner und Einer. Wir suchen hier zu 242

die nächste Wurzel = 6 und fügen dieser noch 2 Nullen für die Zehner- und Einer-Stelle zu. Die übrigen Wurzelziffern zu finden, lehrt am besten das ausgeführte Beispiel.

3. Beispiel. $\sqrt[3]{}$ 1'030'301 = 100

$100^3 = 1\,000\,000$

$3 \cdot 100^2 : 30\,301 = 1$

$3 \cdot 100^2 \cdot 1 = 30\,000$

301

$3 \cdot 100 \cdot 1^2 = 300$

1

$1^3 = 1$

oder $\sqrt[3]{}$ 1'030'301 = 100

$100^3 = 1\,000\,000$

$3 \cdot 100^2 : 30\,301 = 1$

$3 \cdot 100^2 \cdot 1 = 30\,000$

$3 \cdot 100 \cdot 1^2 = 300$ } addirt.

$1^3 = 1$

30 301 subtr. von 30301

00 000

§. 194. Wenn man gewiß weiß, daß die Wurzel einer gegebenen Kubikzahl rational ist, so kann man die Wurzel gleich an der Endziffer der Kubikzahl erkennen. In der, im vorigen Paragraphen aufgestellten Tafel zeigt es sich, daß die Wurzelzahlen von 1 . . . . . 9 in ihren Kubikzahlen alle verschiedene Endziffern haben. Ist die Endziffer z. B. 2, so muß die Wurzelziffer 8 sein. Vorausgesetzt, daß die Wurzel rational ist, bedarf es bei Kubikzahlen mit zweiziffrigen Wurzeln gar keines Wurzelausziehens. Z. B. $\sqrt[3]{}$ 13'824 = 24. Denn: für 13 ist die Wurzel = 2, die Endziffer 4 deutet auf die Wurzelziffer 4, also ist die Wurzel = 24. Ferner: $\sqrt[3]{}$ 804'352 = 93; denn zu 804 gehört nach der gegebenen Tafel die Wurzel 9; zu der Endziffer 7 gehört die Wurzelziffer 3 also $\sqrt[3]{}$ 804357 = 93. Bei Kubikzahlen mit dreistelligen Wurzeln braucht man nur zwei Wurzelziffern zu berechnen, die dritte wird wiederum an der Endziffer der Kubikzahl erkannt. Doch darf man sich dieses Vortheils nur dann bedienen, wenn wie gesagt, die Wurzel rational ist.

Beispiel. $\sqrt[3]{}$ 34'965'783 = 300

$300^3 = 27\,000\,000$ 20

$3 \cdot 300^2 = 270000 : 7\,965\,783$

Weiter bedarf es hier keiner Berechnung, da die Wurzel rational ist. Die Endziffer 3 gibt die Wurzel 7.

Anmerkung. Hat sich der Schüler im Ausziehen der Kubikwurzel so weit geübt, daß er mit Sicherheit arbeitet, so kann er die entbehrlichen Nullen weglassen. Der Lehrer selbst mache auf die bisherige Weise die vollständige Ausarbeitung, und frage den Schüler, ob man nicht auf eine kürzere Weise, etwa mit weniger Ziffern das Ausziehen der Kubikwurzel bewerkstelligen könne. Findet der Schüler den Vortheil nicht, so mache der Lehrer darauf aufmerksam, daß

hier, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel und beim Dividiren, die den ersten Wurzelziffern angehängten Nullen, mithin auch die Nullen der sich ergebenden Produkte unnöthig seien; nur müsse man in diesem Falle mit der Untereinanderstellung der Produkte vorsichtig sein. Beispiel.

4. Beispiel. $\sqrt[3]{\ }$ 154′854′153 = 500

	$500^3 =$	125 000 000	30
$3 \cdot 500^2 = 750000$	:	29 854 153	530
$750000 \cdot 30 =$		22 500 000	
$3 \cdot 500 \cdot 30^2 =$		1 350 000	addirt.
$30^3 =$		27 000	
		23 877 000	
$3 \cdot 530^2 = 842700$	:	5 977 153	= 7
$842700 \cdot 7 =$		5 898 900	
$3 \cdot 530 \cdot 7^2 =$		77 910	addirt.
$7^3 =$		343	
		5 977 153	
		0 000 000	

Kürzer: $\sqrt[3]{\ }$ 154′854′153 = 537

	$5^3 =$	125	
$3 \cdot 5^2 = 75$	:	29 854 d. h.	75 : 298
$75 \cdot 3 =$		225	
$3 \cdot 50 \cdot 3^2 =$		1 350	addirt.
$3^3 =$		27	
		23 877	
$3 \cdot 53^2 = 8427$	:	5 977 153 d. h.	8427 : 59771
$8427 \cdot 7 =$		5 898 9	
$3 \cdot 53 \cdot 7^2 =$		77 91	addirt.
$7^3 =$		343	
		59 77 152	
		00 00 000	

1. Aufg. $\sqrt[3]{\ }$ 46656 (= 36); $\sqrt[3]{\ }$ 103823 (= 47); $\sqrt[3]{\ }$ 205379 (= 59); $\sqrt[3]{\ }$ 179406144 (= 564); $\sqrt[3]{\ }$ 279726264 (= 654); $\sqrt[3]{\ }$ 312908547069 (= 6789).

§. 195. Der Kubus von 1 ist 1 oder $1^3 = 1$; ein ächter Bruch ist kleiner als 1, also wird auch der Kubus eines ächten Bruchs kleiner als 1, folglich wieder ein Bruch sein. Wenn ein Bruch zur Kubikzahl erhoben werden soll, so muß er dreimal als Faktor gesetzt werden, und zwar der Zähler sowol als auch der Nenner. Daraus folgt, daß, wenn aus einem Bruche die Kubikwurzel gezogen werden soll, man dieselbe sowol aus dem Zähler als aus dem Nenner ziehen müsse.

a. Kubikwurzeln $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$

b. Kubikzahlen $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{216}$, $\frac{1}{343}$, $\frac{1}{512}$ u. s. w.

a. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$

b. $\frac{8}{27}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{64}{125}$, $\frac{125}{216}$, $\frac{217}{343}$, $\frac{343}{512}$, $\frac{512}{729}$, $\frac{729}{1000}$

u. s. w.

Beiſpiel: $\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{512}} = {}^5/_8$.

2) $\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = ?\ (= {}^7/_9)$; $\sqrt[3]{\frac{12167}{24389}} = ?\ (= {}^{23}/_{29})$; $\sqrt[3]{\frac{262144}{421875}} = ?\ (= {}^{64}/_{75})$; $\sqrt[3]{\frac{1952625}{16777216}} = ?\ (= {}^{125}/_{256})$.

Wenn ſich aus einer Kubikzahl die Wurzel weder durch ganze Zahlen allein, noch mit Hülfe der Brüche genau darſtellen läßt, ſo nennt man die Zahl incommenſurabel (unmeßbar), ſo wie die Wurzel irrational; im Gegentheil, wenn ſich die Kubikzahl durch eine Wurzel genau meſſen läßt, ſo wird die Wurzel rational, und die Kubikzahl commenſurabel (meßbar) genannt. Iſt die Wurzel irrational, ſo wird ſie näherungsweiſe durch einen Bruch dargeſtellt, wobei man in der Regel die Wurzel um ſo genauer erhält, je größer der Bruch iſt, in welchen die Kubikzahl verwandelt wird.

Aus der eben gegebenen Tafel der gebrochenen Kubikwurzeln und Kubikzahlen a und b ergibt ſich Folgendes:

Verlangt man die Wurzel

a) in Halben,	ſo verwandelt man die Kubikzahl in	8tel
b) = Dritteln,	= = = = = =	27ſtel
c) = Vierteln,	= = = = = =	64ſtel
d) = Fünfteln,	= = = = = =	125ſtel
e) = Sechsteln,	= = = = = =	216tel
f) = Siebenteln,	= = = = = =	343tel
g) = Achteln,	= = = = = =	512tel
h) = Neunteln,	= = = = = =	729tel
i) = Zehnteln,	= = = = = =	1000tel
k) = Hunderteln,	= = = = = =	1000000tel u. ſ. w.

§. 196. Beiſpiele. $\sqrt[3]{10}$ ſoll in Halben, Dritteln, Vierteln, Fünfteln . . . . . Zehnteln und Hunderteln dargeſtellt werden.

a) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 8}{8}} = \sqrt[3]{\frac{80}{8}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{8}} = {}^1/_2 = 2$

b) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 27}{27}} = \sqrt[3]{\frac{270}{27}} = \frac{\sqrt[3]{270}}{\sqrt[3]{27}} = {}^3/_3 = 2$

c) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 64}{64}} = \sqrt[3]{\frac{640}{64}} = \frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{64}} = {}^4/_4 = 2$

d) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 125}{125}} = \sqrt[3]{\frac{1250}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1250}}{\sqrt[3]{125}} = {}^{10}/_5 = 2$

e) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 216}{216}} = \frac{\sqrt[3]{2160}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{\sqrt[3]{2160}}{6} = {}^{13}/_{6} = 2$

f) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 343}{343}} = \frac{\sqrt[3]{3430}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{\sqrt[3]{3430}}{7} = {}^{15}/_{7} = 2^{1}/_{7}$

g) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 512}{512}} = \frac{\sqrt[3]{5120}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{\sqrt[3]{5120}}{8} = {}^{17}/_{8} = 2^{1}/_{8}$

h) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 729}{729}} = \frac{\sqrt[3]{7290}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{\sqrt[3]{7290}}{9} = {}^{19}/_{9} = 2^{1}/_{9}$

i) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 1000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{10000}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{10000}}{10} = {}^{21}/_{10} = 2^{1}/_{10}$

k) $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 1000000}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{10000000}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{10000000}}{100} = {}^{215}/_{100} = 2^{15}/_{100}$

Eine aufmerksame Vergleichung zeigt, daß man bei f und k der wahren Wurzel am nächsten kommt. $f = 2^{1}/_{7}$; $(2^{1}/_{7})^3 = 9^{288}/_{343}$ oder $= 9{,}84$; $k = 2^{15}/_{100} = 2^{3}/_{20}$; $(2^{3}/_{20})^3 = 9^{7307}/_{8000} = 9{,}94$, also sehr nahe 10. Bei f war man der wahren Wurzel nahe, bei g, h, i entfernte man sich wieder immer mehr von dem wahren Wurzelwerthe. Obgleich man daher bei incommensurabelen Zahlen den wahren Werth der Wurzel nicht vollkommen darstellen kann, so ist es doch möglich, demselben auf die angezeigte Weise so nahe zu kommen, daß in der Anwendung das Mangelnde nicht wahrnehmbar wird.

Gewöhnlich werden irrationale Wurzeln in Decimalbrüchen dargestellt. In je mehr Decimalstellen die Wurzel dargestellt wird, desto näher kommt man dem wahren Werthe. $\sqrt[3]{12} = 2$; $\sqrt[3]{12} = 2{,}2$ $\sqrt[3]{12} = 2{,}28$; $\sqrt[3]{12} = 2{,}288$. Gemeine Brüche mit irrationalen Wurzeln werden meistens in Decimalbrüche mit rationalen Nennern verwandelt und alsdann wird die Kubikwurzel ausgezogen. Z. B. $\frac{12167}{24389} = \frac{12167{,}000}{24389} = 0{,}499$ sehr nahe; $\sqrt[3]{0{,}499} = 0{,}7$ oder näher $= 0{,}8$, denn $(0{,}7)^3 = 0{,}343$; $(0{,}8)^3 = 0{,}512$; $\sqrt[3]{0{,}499} = \sqrt[3]{{}^{499}/_{1000}} = {}^{8}/_{10}$ sehr nahe.

Soll die Kubikwurzel aus einer gemischten Zahl gezogen werden, so verwandle man sie zuerst in einen gewöhnlichen, und diesen wieder in einen Decimalbruch, z. B. $\sqrt[3]{3^{5}/_{7}} = \sqrt[3]{{}^{26}/_{7}} = \sqrt[3]{3{,}714} = 1{,}5$.

Soll die Kubikwurzel aus einem Decimalbruch mit irrationaler Wurzel gezogen werden, so hänge man so viele Nullen an, bis der

Nenner rational wird, z. B. $\sqrt[3]{0{,}72} = \sqrt[3]{0{,}720} = \sqrt[3]{{}^{720}/_{1000}} = {}^{9}/_{10}$ beinahe. $\sqrt[3]{0{,}9} = \sqrt[3]{0{,}900}\ \sqrt[3]{} = {}^{900}/_{1000} = {}^{9}/_{10}$, genauer ${}^{9,6}/_{10}$, $= {}^{96}/_{100} = 0{,}96$.

3) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{{}^{125}/_{8}} = {}^{5}/_{2} = 2\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{52\frac{47}{64}} = \sqrt[3]{{}^{3375}/_{64}} = {}^{15}/_{4} = 3\frac{3}{4}$; $\sqrt[3]{{}^{13}/_{17}} = \frac{2{,}35}{2{,}56}\sqrt[3]{{}^{235}/_{256}}$ oder $\sqrt[3]{{}^{13}/_{17}} = \sqrt[3]{0{,}765}$ $= 091$; $\sqrt{4\frac{4}{5}} = \sqrt{4{,}8} = 4{,}800 = \sqrt{{}^{4800}/_{1000}} = {}^{1,7}/_{10}$ $= {}^{17}/_{10}$ beinahe.

§. 197. Oft läßt sich eine Kubikzahl mit irrationaler Wurzel in zwei Faktoren zerlegen, von welchen einer rational ist, z. B. $108 = \sqrt[3]{(27 \cdot 4)} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{768} = \sqrt[3]{64 \cdot 12}$ $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{12} = 4\sqrt[3]{12}$.

4) $\sqrt[3]{40} = ?\ (= \sqrt[3]{8 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5})$; $\sqrt[3]{750} = (= \sqrt[3]{125 \cdot 6})$ $= 5\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[3]{42189} = ?\ (= \sqrt[3]{343 \cdot 123} = 7\sqrt[3]{123}.)$

Anmerkung. Wir haben im vorigen Abschnitt §. 187 gesehen, daß die Wurzel jeder Quadratzahl einen doppelten Werth hat, nämlich einen positiven und einen negativen. Wie mag es sich in diesem Punkte mit den Wurzeln der Kubikzahlen verhalten? Wir wollen sehen! $-8^3 = -8 \times -8 \times -8$ $= +64 \times -8 = -512$. Die Wurzel (-8) ist hier negativ, die Kubikzahl (-512) ebenfalls; $+8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = +512$. Wurzel und Kubikzahl sind hier positiv. $-5^3 = -5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$; $\sqrt[3]{-125} = -5$, denn $+5$ gibt im Kubus $+512$ und nicht zugleich -5^3. Positive Wurzeln geben auch positive Kubikzahlen und negative Wurzeln nur negative Kubikzahlen.

Daraus ergibt sich, daß die Wurzeln der Kubikzahlen nur Einen Werth haben.

Zur Bequemlichkeit für den Lehrer folgen hier zwei Bruchstücke einer Tafel von Quadrat- und Kubikzahlen, so wie auch einer Tafel von Quadrat- und Kubikwurzeln. Vermittelst derselben kann er den Schülern reichlich zur Uebung geben und ihre Arbeit schnell beurtheilen.

Quadrat- und Kubiktafel.

Wurzel	Quadr.	Kubus	Wurzel	Quadr.	Kubus	Wurzel	Quadr.	Kubus
1	1	1	9	81	729	17	289	4913
2	4	8	10	100	1000	18	324	5832
3	9	27	11	121	1331	19	361	6859
4	16	64	12	144	1728	20	400	8000
5	25	125	13	169	2197	21	441	9261
6	36	216	14	196	2744	22	484	10648
7	49	343	15	225	3375	23	529	12167
8	64	512	16	256	4096	24	576	13824

Digitized by Google

Wurzel	Quadr.	Kubus	Wurzel	Quadr.	Kubus	Wurzel	Quadr.	Kubus
25	625	15625	51	2601	132651	77	5929	456533
26	676	17576	52	2704	140608	78	6084	474552
27	729	19683	53	2809	148877	79	6241	493039
28	784	21952	54	2916	157464	80	6400	512000
29	841	24389	55	3025	166375	81	6561	531441
30	900	27000	56	3136	175616	82	6724	551368
31	961	29791	57	3249	185193	83	6889	571781
32	1024	32768	58	3364	195112	84	7056	592704
33	1089	35937	59	3481	205379	85	7225	614125
34	1156	39304	60	3600	216000	86	7396	636056
35	1225	42875	61	3721	226981	87	7569	658503
36	1296	46656	62	3844	238328	88	7744	681472
37	1369	50653	63	3969	250047	89	7921	704969
38	1444	54872	64	4096	262144	90	8100	729000
39	1521	59319	65	4225	274625	91	8281	753571
40	1600	64000	66	4356	287496	92	8464	778688
41	1681	68921	67	4489	300763	93	8649	804357
42	1764	74038	68	4624	314432	94	8836	829684
43	1849	79507	69	4761	328509	95	9025	857375
44	1936	85184	70	4900	343000	96	9216	873736
45	2025	91125	71	5041	357911	97	9409	912673
46	2116	97336	72	5184	373248	98	9604	941192
47	2209	103823	73	5329	389017	99	9801	970299
48	2304	110592	74	5476	405224	100	10000	1000000
49	2401	117649	75	5625	421875	101	10201	1030301
50	2500	125000	76	5776	438976	102	10404	1061208

Tafel der Quadrat- und Kubikwurzeln von 1 bis 110 u. f.

Anmerkung. In dieser Tafel ist die vierte Decimalstelle um 1 vermehrt worden, wenn die nächstfolgende 5 oder über 5 betrug.

Zahlen	Qdrtw.	Kubikw.	Zahlen	Qdrtw.	Kubikw.	Zahlen	Qdrtw.	Kubikw.
1	1,0000	1,0000	11	3,3166	2,2240	21	4,5826	2,7589
2	1,4142	1,2599	12	3,4641	2,2894	22	4,6904	2,8020
3	1,7320	1,4422	13	3,6056	2,3513	23	4,7958	2,8439
4	2,0000	1,5874	14	3,7417	2,4101	24	4,8990	2,8845
5	2,2361	1,7100	15	3,8730	2,4662	25	5,0000	2,9240
6	2,4495	1,8171	16	4,0000	2,5198	26	5,0990	2,9625
7	2,6458	1,9129	17	4,1231	2,5713	27	5,1962	3,0000
8	2,8284	2,0000	18	4,2426	2,6207	28	5,2915	3,0366
9	3,0000	2,0801	19	4,3589	2,6684	29	5,3852	3,0723
10	3,1623	2,1544	20	4,4721	2,7144	30	5,4772	3,1072

Zahlen	Qdrtw.	Kubikw.	Zahlen	Qdrtw.	Kubikw.	Zahlen	Qdrtw.	Kubikw.
31	5,5678	3,1414	61	7,8102	3,9365	91	9,5394	4,4979
32	5,6569	3,1748	62	7,8740	3,9579	92	9,5917	4,5144
33	5,7446	3,2075	63	7,9373	3,9791	93	9,6437	4,5307
34	5,8310	3,2396	64	8,0000	4,0000	94	9,6954	4,5468
35	5,9161	3,2711	65	8,0623	4 0207	95	9,7468	4,5629
36	6,0000	3,3019	66	8,1240	4,0412	96	9,7980	4,5789
37	6,0828	3,3322	67	8,1854	4,0615	97	9,8489	4,5947
38	6,1644	3,3620	68	8,2462	4,0817	98	9.8995	4,6104
39	6,2450	3,3912	69	8,3066	4,1016	99	9,9499	4,6261
40	6,3246	3,4200	70	8,3666	4,1213	100	10,0000	4,6416
41	6,4031	3,4482	71	8,4261	4,1408	101	10,0499	4,6570
42	6,4807	3,4760	72	8,4853	4,1602	102	10,0995	4,6723
43	6,5574	3,5034	73	8,5440	4,1879	103	10,1489	4,6875
44	6,6332	3,5303	74	8,6023	4,1983	104	10,1980	4,7027
45	6,7082	3,5569	75	8,6602	4,2172	105	10,2470	4,7177
46	6,7823	3,5830	76	8,7178	4,2358	106	10,2956	4,7326
47	6,8557	3,6088	77	8,7750	4,2543	107	10,3441	4,7475
48	6,9282	3,6342	78	8,8318	4,2727	108	10,3923	4,7622
49	7,0000	3,6593	79	8,8882	4,2908	109	10,4403	4,7769
50	7,0711	3,6840	80	8,9443	4,3089	110	10,4881	4,7914
51	7,1414	3,7084	81	9,0000	4,3267	150	12,2474	5,3133
52	7,2111	3,7325	82	9,0554	4,3445	279	16,5831	6,5030
53	7,2801	3,7563	83	9,1104	4,3621	336	19,6469	7,2810
54	7,3485	3,7798	84	9,1652	4,3795	479	21,8860	7,8243
55	7,4162	3,8030	85	9,2195	4,3968	583	24,1454	8,3539
56	7,4833	3,8259	86	9,2736	4,4140	589	26,2488	8,8323
57	7,5498	3,8485	87	9,3274	4,4310	701	26,4764	8,8833
58	7,6158	3,8709	88	9,3808	4,4480	777	27,8747	9,1933
59	7,6811	3,8930	89	9,4340	4,4647	896	29,9332	9,6406
60	7,7460	3,9149	90	9,4868	4,4814	999	31,6070	9,9967

Wrzlz.	Qdrtzhln.	Kubikzahlen.	Wrzlz.	Qdrtzhln.	Kubikzahlen.
111	12321	1397631	147	21609	3176523
129	16641	2146689	201	40401	8120601
248	61508	15252992	256	65536	16777216
357	127449	45499293	345	119025	41063625
476	226576	107850176	404	163216	65939264
585	342225	200201625	489	239121	116930169
697	485809	338608873	511	261121	133432831
701	491401	344472101	663	439569	291434247
749	561001	420189749	789	622521	491169069
888	788544	700227072	817	667489	545338513
890	792100	704969000	872	760384	663054848
907	822649	746142643	898	806404	724150792
987	974169	961504803	999	998001	997002999

Digitized by Google

Anmerkung. Für die, welche eine Quadrattafel anfertigen wollen, folgende Erleichterung. Erhebt man eine beliebige Zahl a ins Quadrat, so erhält man aa oder a^2. Vermehrt man a um 1, so ist die Quadratzahl davon $a^2 + 2a + 1^2$ und der Unterschied beider Quadratzahlen beträgt $2a + 1^2$. Vermehrt man a um 2, so ist der Unterschied 2mal $2a + 2^2 = 4a + 2^2$; setzt man der Zahl a 3 zu, so ist a^2 von der Quadratzahl der Wurzel $a + 3$ um 2mal 3mal $a = 6a + 3^2$ verschieden. Auf diese Weise kann man nun leicht neue Quadratzahlen finden. Für a wollen wir 16 annehmen. Davon ist die Quadratzahl 256. Die Quadratzahl von 17 wird nun sein 256 + 2mal 16 + $1^2 = 256 + 33 = 289$. Die Quadratzahl von 19 wird sein 256 + 2mal 3mal 16 + $3^2 = 256 + 6 . 16 + 3^2 = 256 + 105 = 361$. Man addirt also zu der bekannten Quadratzahl das doppelte Produkt aus dem Zusatze und der gegebenen Wurzel, mehr die Quadratzahl des Zusatzes. Gesetzt wir wollten die Quadratzahl von 26 wissen. Die Quadratzahl von 16 = 256; der Zusatz ist 10, 16mal 10 = 160, doppelt genommen = 320, die Quadratzahl von 10 = 100. Die Quadratzahl von 26 ist also: 256 + 320 + 100 = 676.

Der Zusatz von 5 würde sein = $10a + 5^2$
" " " 10 " " = $20a + 10^2$
" " " 20 " " = $40a + 20^2$
" " " 30 " " = $60a + 30^2$
" " " 40 " " = $80a + 40^2$
" " " 50 " " = $100a + 50^2$
u. s. w.

$a^2 + 2a6 + 6^2$
Das Quadrat von 26 + 50 = 76 würde demnach sein 676 + 2600 + 2500 = 5776
$a^2 + 2a6 + 6^2$
" " " 76 + 50 = 126 " " " 5776 + 7600 + 2500 = 15876
$a^2 + 2a6 + 6^2$
" " " 126 + 50 = 176 " " " 15876 + 12600 + 2500 = 30976
u. s. w.

Ist die Quadratzahl gefunden, so bedarf es nur noch des Multiplicirens derselben mit der Wurzel, um auch die Kubikzahl zu finden. Oder man verfahre auf folgende Weise: $12^3 = 1728$; $(12 + 1)^3 = 12^3 + 3 . 12^2 + 3 . 12 + 1^3$. Der Unterschied zwischen 12^3 und $(12 + 1)^3$ ist demnach: $12^3 + 3 . 12^2 + 3 . 12 + 1^3$, $— 12^3 = 3 . 12^2 + 3 . 12 + 1 = 432 + 36 + 1 = 469$. Die Kubikzahl von 13 ist also: 1728 + 469 = 2197. Man lasse nun den Schüler auf gleiche Weise die Kubikzahlen von den nächstfolgenden Wurzeln bilden, also von 14, 15, 16 u. s. w.

Vier und zwanzigster Abschnitt.

§. 198. Geometrische Reihen oder geometrische Progressionen.

Was man unter geometrischer Progression versteht, ist im §. 158 gesagt worden. Man kann sich eine geometrische Pregression auch vorstellen als eine Reihe Zahlen, von welchen je zwei unmittelbar auf einander folgende einerlei geometrische Verhältnisse ausmachen. 2 , 4 , 8 , 16 , 32 u. s. w. ist eine geometrische Progression, denn 2 verhält sich zu 4 , wie 4 zu 8 oder wie 8 zu 16 oder wie 16 zu 32. Die einzelnen Zahlen der geometrischen Reihe werden, wie bei den arithmetischen Reihen, Glieder oder Verhältnißglieder genannt; die Zahl, welche anzeigt, wie oft eins von zwei, in der Reihe beisammenstehenden Gliedern in dem

andern enthalten ist, heißt der Exponent oder Anzeiger. Durch das erste Glied, den Exponenten, und das letzte Glied ist die ganze Progression bestimmt. Der Exponent einer geometrischen Reihe muß entweder mehr als 1 oder weniger als 1 betragen. Ist der Exponent 1, so entsteht keine geometrische Progression, z. B. 3, 3, 3, 3.... ist er kleiner als 1, also ein ächter Bruch, so wird eine abnehmende, ist er größer als 1, eine zunehmende geometrische Progression gebildet.

Abnehm. Progr. 36, 27, $20\frac{1}{4}$, $15\frac{3}{16}$ .... mit dem Expon. $\frac{3}{4}$
" " 24, 12, 6, 3, $1\frac{1}{2}$.... " " " $\frac{1}{2}$
zunehm. Progr. 2, 6, 18, 54, 162 .... " " " 3
" " 4, 5, $6\frac{1}{4}$, $7\frac{13}{16}$ .... " " " $\frac{5}{4}$

Es seien folgende Progressionen gegeben:

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
a.	1,	3,	9,	27,	81,	243,	729
b.	729,	243,	81,	27,	9,	3,	1

so kann die Reihe a auch so dargestellt werden:

$$\begin{array}{llllll} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a. = & 1, & 1.3; & 1.3.3; & 1.3.3.3; & 1.3.3.3.3; & 1.3.3.3.3.3... \\ b. = & 1.3.3.3.3.3.3; & 1.3.3.3.3.3; & 1.3.3.3.3; & 1.3.3.3; & 1.3.3; & 1.3; \quad 1... \end{array}$$

$$c = 729, \frac{729}{1.3} \frac{729}{1.3.3} \frac{729}{1.3.3.3} \frac{729}{1.3.3.3.3} \frac{729}{1.3.3.3.3.3} \cdots\cdots$$

Hieraus wird klar, daß in jedem Gliede einer geometrischen Reihe, sowol einer abnehmenden als zunehmenden, der Exponent so oftmal als Faktor ist gesetzt worden, als bis dahin die Anzahl der Glieder — 1 beträgt. Im vierten Gliede befindet sich der Exponent 3 dreimal als Faktor, im sechsten Gliede fünfmal, im hundertsten Gliede wird der Exponent neun und neunzig mal als Faktor enthalten sein.

In einer geometrischen Progression sind die Produkte aus dem ersten und letzten Gliede, aus dem zweiten und vorletzten, aus dem dritten Gliede vom Anfang und dem dritten vom Ende, überhaupt aus zwei Gliedern, von welchen das eine so weit vom ersten, als das andere vom letzten Gliede absteht, einander gleich. Demnach sind in dieser gegebenen Progression einander gleich:

$$\overset{1}{1} \cdot \overset{729}{729} = 1 \times 1.3.3.3.3.3.3 = 1.3.3.3.3.3.3 = 729$$
$$\overset{3}{3} \cdot \overset{243}{243} = 1.3 \times 1.3.3.3.3.3 = 1.3.3.3.3.3.3 = 729$$
$$\overset{9}{9} \cdot \overset{81}{81} = 1.3.3 \times 1.3.3.3.3 = 1.3.3.3.3.3.3 = 729$$
$$\overset{27}{27} \cdot \overset{27}{27} = 1.3.3.3 \times 1.3.3.3 = 1.3.3.3.3.3.3 = 729$$

§. 199. In einer geometrischen Reihe sind, wie bei einer arithmetischen, folgende Stücke zu merken:

1. Das erste Glied.
2. Das letzte Glied.
3. Der Exponent oder Anzeiger der Progression.
4. Die Anzahl der Glieder.

Man könnte als fünftes Stück noch die Exponentenzahl anführen, d. h. die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Grundzahl als Faktor ist gesetzt worden. Wir haben aber schon gesehen, daß die Exponentenzahl um 1

kleiner ist, als die Anzahl der Glieder beträgt, weshalb sie auch keiner besondern Bestimmung bedarf. Ist die Anzahl der Glieder z. B. 10, so ist die Exponentenzahl = 9, überhaupt ist diese n — 1, wenn die Anzahl der Glieder = n.

1. Anmerkung. Bei einer genugsam fortgesetzten abnehmenden arithmetischen Progression kommt man endlich auf negative Glieder, dies ist bei einer abnehmenden geometrischen Reihe nie der Fall. Obgleich hier die Glieder immer kleiner werden, so kommen sie doch nicht über 0 hinaus. Eine arithmetische Reihe ist nach beiden Seiten hin unendlich; ebenso eine geometrische Progression. Das erste Glied einer arithmetischen Reihe kann 0 sein; bei einer geometrischen nicht, weil sonst alle folgende Glieder ebenfalls 0 würden.

2. Anmerkung. Der Lehrer lasse mehrere, sowol abnehmende als zunehmende Progressionen, von welchen er das erste oder letzte Glied nebst dem Exponenten angibt, bilden. Sind die Schüler mit der Buchstabenrechnung bekannt, so gebe er ihnen die allgemeine Darstellung einer geometrischen Reihe.

a sei das erste Glied,
e der Exponent,
n die Anzahl der Glieder, da alsdann n — 1 die Zahl des Exponenten ist,
z das letzte Glied,

so ist die Progression:

1 2 3 4 5 .... n

$a , ae^1 , ae^2 , ae^3 , ae^4 .... ae^{n-1}$

ae^1 zeigt an, daß e einmal, e^2 daß e zweimal = ee, e^3 daß e 3 mal = eee, und e^{n-1} daß e hier n — 1 mal als Faktor ist gesetzt worden.

§. 200. Wenn einige der, im vorigen Paragraph angeführten Stücke gegeben sind, so lassen sich die übrigen darnach bestimmen.

1. Das erste Glied und der Exponent sind gegeben, ein beliebiges Glied wird gesucht.

Man setze den Exponent so oftmal als Faktor, als die Anzahl des zu suchenden Gliedes beträgt, weniger 1, und multiplicire das Produkt dieser Faktoren mit dem ersten Gliede. Z. B. Das erste Glied sei 2, der Exponent 3, das 5. Glied wird gesucht, so ist 3 . 3 . 3 . 3 . 2 = 162 das fünfte Glied. Das erste Glied sei 3, der Exponent $^1/_2$, wie groß ist das sechste Glied? $^1/_2 . ^1/_2 . ^1/_2 . ^1/_2 . ^1/_2 . 3 = ^3/_{32}$ das sechste Glied.

Anmerkung. Weiß der Schüler, was eine Potenz ist, so kann ihm auch die Regel gegeben werden: Man erhebe den Exponent auf eine Potenz, deren Grad gleich ist der Anzahl der Glieder — 1 und multiplicire diese Potenz mit dem ersten Gliede. $3 . 3 . 3 . 3 . 2 = 2 . 3^4 = 2 . 81 = 162$. $^1/_2 . ^1/_2 . ^1/_2 . ^1/_2 . ^1/_2 . 3 = (^1/_2)^5 . 3 = 3 . ^1/_{32} = ^3/_{32}$.

2. Das erste und zweite Glied sind gegeben, der Exponent wird gesucht. Man dividire das erste Glied in das zweite. Das erste Glied sei 5, das zweite 30, so ist der Exponent $^{30}/_5 = 6$.

3. Das letzte Glied, der Exponent und die Anzahl der Glieder sind gegeben, das erste Glied wird gesucht. Man setze den Exponent so oftmal als Faktor, als die Anzahl der Glieder weniger 1 beträgt, und dividire das Produkt

aus denſelben in das letzte Glied. Das letzte Glied ſei 162, der Exponent 3, die Anzahl der Glieder 5, ſo iſt das erſte Glied: (3 . 3 . 3 . 3) : 162 = 81 : 162 = 2.

Anmerkung. Iſt die Anzahl der Glieder groß, ſo iſt es ziemlich mühſam, den Exponent auf einen hohen Grad zu erheben. Z. B. die Anzahl der Glieder ſei 17, der Exponent 2, das erſte Glied 1, wie groß iſt das letzte Glied? Hier muß 2 auf die ſechszehnte Potenz erhoben werden. Einiger Vortheil dabei ergibt ſich aus folgendem Verfahren:

2
2
4 = 2^2
4 = 2^2
16 = 2^4
16 = 2^4
256 = 2^8
256 = 2^8
65536 = 2^{16}

Wer mit Logarithmen umzugehen verſteht, wird ſich noch leichter helfen können.

4. Das erſte und letzte Glied und die Anzahl der Glieder ſind gegeben, der Exponent wird geſucht. Man dividire das erſte Glied in das letzte (bei einer abnehmenden Progreſſion das letzte in das erſte), ziehe aus dieſem Quotient die Wurzel, deren Grad 1 weniger iſt als die Anzahl der Glieder. Das erſte Glied iſt 2, das letzte 162, die Anzahl der Glieder 5, ſo iſt der Exponent = $\sqrt[4]{}$ (2 : 162) = $\sqrt[4]{}$ 81 = 3. Hier wird Kenntniß des Wurzelausziehens vorausgeſetzt *); Kenntniß des Gebrauchs der Logarithmen iſt hier auch meiſtens unentbehrlich.

Anmerkung. Wie ſich aus zwei Gliedern einer geometriſchen Progreſſion die zu denſelben gehörige mittlere geometriſche Proportionalzahl finden läßt, iſt in dem erſten Abſchnitt, S. 20, §. 26 Anmerk. gezeigt worden. Es muß hier noch mehr bemerkt werden, daß ſich aus 3 unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern eine ſtetige geometriſche Proportion bilden läßt. 1, 4, 16, 64, 256. Darauf laſſen ſich folgende ſtetige Proportionen bilden:

1) 1 , 4 , 16; 1 : 4 = 4 : 16
2) 4 , 16 , 64; 4 : 16 = 16 : 64
3) 16 , 64 , 256; 16 : 64 = 64 : 256

§. 201. Es ſei folgende geometriſche Progreſſion gegeben:

a. 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 Man multiplicire dieſe mit dem Exp. 2, ſo erhält man die Reihe b.
b. 2 , 4 , 8 , 16 , 82 , 64 , 128 , 256

Die Progreſſion b iſt das doppelte von a. Subtrahirt man daher a von b, ſo bleibt die einfache Progreſſion a wieder übrig. Da in beiden Progreſſionen a und b die ſchräg gegen einander ſtehenden Glieder gleich ſind, ſo braucht man dieſe beim Subtrahiren nur gegen einander auszuſtreichen.

a. 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128
b. 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256

*) S. 1. Th. S. 308, 309 und 304 und 315.

Bei a ist nun noch das erste (1) und bei b noch das letzte Glied (256) geblieben. Subtrahiren wir nun noch 1 von 256 = 255, so ist die Subtraktion der Reihe a von b vollständig geschehen, und der Rest muß der Reihe a gleich sein, also 255 = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128).

Da haben wir unter der Hand ein Mittel entdeckt, die Summe einer geometrischen Progression zu finden. Doch vorher sollen einige Beispiele selbst auf die Regel führen.

Es sei die Progression folgende:

a. 2 , 6 , 18 , 54 , 162 , 486 , 1458
b. 6 , 18 , 54 , 162 , 486 , 1458 , 4374

2

Die doppelte Summe von a = 4372

2 : 4372

Die Summe der Reihe a = 2186

Die ganze Reihe a ist mit dem Expon. der Progression multiplicirt und dadurch die Reihe b gebildet worden.

Die Reihe b ist nun das 3fache von a. Subtrahirt man daher a von b, so bleibt noch das Doppelte von a oder 2 a übrig; dieß durch 2 dividirt = a.

Es ist unnöthig, die Reihe b vollständig hinzusetzen. Wir brauchen von b nur das letzte Glied, weil die andern Glieder gegen die schräg darüber stehenden ausgestrichen werden.

Daraus ergibt sich zur Auffindung der Summe einer geometrischen Progression folgende Regel: Man multiplicire das letzte Glied der gegebenen Progression mit dem Exponenten, subtrahire von diesem Produkt das erste Glied und dividire in diesen Rest mit dem um 1 verminderten Nenner.

Es sei die Progression:

a. 1 , $^1/_4$, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$, $^1/_{256}$, $^1/_{1024}$ Diese Reihe a mit dem Expon. multiplicirt.
b. $^1/_4$, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$, $^1/_{256}$, $^1/_{1024}$, $^1/_{4096}$

Die Reihe b ist $^1/_4$ der Reihe a. Hier subtrahire man nun b von a, also $^1/_{4096}$ von 1, weil sich die übrigen Glieder ausgleichen.

$1 - {}^1/_{4096} = \frac{4095}{4096}$. Dieß ist $^3/_4$ der Reihe a.

$$^3/_4 : {}^4/_4 = \frac{4095}{4096} : x$$

$$= 3 : 4 = \frac{4095}{4096} : x$$

$$3 : \frac{4095}{1024} = \frac{1365}{1024} = 1\,\frac{341}{1024}$$

Oder man multiplicire die Progression mit 4, so hat man

a. 1 , $^1/_4$, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$, $^1/_{256}$, $^1/_{1024}$
b. 4 , 1 , $^1/_4$, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$, $^1/_{256}$.

Nun bleibt noch zu subtrahiren: $4 - {}^1/_{1024} = 3\,{}^{1023}/_{1024}$ die dreifache Summe von a, daher ist die einfache $3 : 3\,{}^{1023}/_{1024} = 1\,{}^{341}/_{1024}$.

§. 202. Aufgaben.

1) A läßt sein Haus für 4000 Thlr. zum Verkauf ausbieten. B, der dasselbe wol kaufen möchte, findet die Taxe zu hoch und beide können nicht einig werden. Da macht A dem B folgenden Vorschlag: In dem Hause sind 12 Zimmer, für das erste Zimmer bezahle mir 1 Thl., für das zweite 2 Thl., für das dritte 4 Thl. u. s. f., für jedes folgende Zimmer das Doppelte des vorhergehenden. B glaubt einen guten Handel zu thun und willigt gleich ein; wie viel mußte er a) überhaupt und b) für das zwölfte Zimmer bezahlen?

Aufl. Es wird hier das letzte Glied und die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression gesucht, von welcher das erste Glied = 1, der Exponent = 2, die Anzahl der Glieder = 12.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048. Das letzte ist 2048, das letzte Zimmer = b; $2048 \cdot 2 - 1 = 4096 - 1 = 4095$ Thl. = a.

2) Ein reicher unverheiratheter Mann war dem Tode nahe. Auf sein Ersuchen bedeutet ihm der Arzt, daß er nicht manche Stunde mehr zu leben habe, er möge daher sein Vermächtniß bestimmen. Da antwortete der Kranke entschlossen: Dem Waisenhause vermache ich für die erste Stunde, die ich noch zu leben habe, 1 Pfenning, für die zweite 2, für die dritte 4, und so fort, für jede folgende Stunde das Doppelte der vorhergehenden. Er lebte nun noch 24 Stunden; wie groß fiel das Vermächtniß aus? Antw. 46603 Thl. 11 Sgr. 4 Pf.

Fünf und zwanzigster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

Vorbemerkung. Nichts gewährt beim Erlernen einer Wissenschaft mehr Vergnügen, als die Beobachtung der ersten Veranlassung zu ihrer Entstehung und ihrer allmähligen Fortbildung, und kein Unterricht ist zugleich lehrreicher und bildender für den Geist, als eine historische Darstellung des Entstehens, der Entwicklung und weiteren Ausbildung einer Wissenschaft oder Kunst. Eine solche Darstellung ist zugleich die Methode der naturgemäßen Geistesbildung, die wahre Elementar-Methode, wie sie die frühere Jugend bedarf. Auf diese Weise wird es klar, daß die Wissenschaften nach und nach sich gebildet und vervollkommnet haben; daß jede anfänglich nur wenige Lehrsätze enthielt, welche irgend ein Bedürfniß erheischte; daß aber mit den allgemeinen Fortschritten der Geistesbildung der Reiz zum Wissen erhöht wurde und der Kreis der Kenntnisse sich immer mehr erweiterte. Wie klein war anfänglich das Feld der Geometrie, und wie weit erstreckt sich heute ihr Gebiet! Ein Bedürfniß trieb die Egypter und Babilonier zu praktischen Aufgaben der Geometrie, und damit zu den ersten mathematischen Untersuchungen. Eine gefundene Wahrheit führte zur andern, förderte die Wissenschaft, indem sie zugleich den Geist bildete und zu Größerem befähigte. Das Selbstfinden einer Wahrheit, wie diese Methode lehrt, gewährt, wie jeder aus Erfahrung weiß, weit mehr Vergnügen, als das bloß passive Aufnehmen derselben. Hier wird mancher den Grund finden, wie es gekommen, daß er in der Schule bei wichtigen und interessanten Lehrgegenständen dennoch Lust und Muth verlor, dem Unterricht durchaus keinen Geschmack, und für das Leben keine Anwendung abgewinnen

Digitized by Google

konnte. Dagegen finden wir, daß andere, in denen durch besondere Veranlassung ein wissenschaftliches Bedürfniß erwachte, sich selbst Bahn brachen, mit einem, durch keine Schwierigkeit zu schwächenden Muthe vordrangen, und so zu einer gründlichen wissenschaftlichen Erkenntniß gelangten. Wie viele Geometer haben sich nicht auf diese Weise gebildet; ja sind nicht überhaupt die ersten Kenntnisse der Geometrie, Astronomie, Physik u. a. m. auf diesem Wege gefunden worden? Es ist aber Sache des Lehrers, dahin zu arbeiten, daß das Einzelne in der Seele des Schülers nicht vereinzelt (isolirt) bleibe, und die Kenntniß desselben nicht bloß ein Aggregat vieler einzelnen Kenntnisse werde; vielmehr soll der Lehrer dahin wirken, das verschiedene Einzelne oder Besondere zum Allgemeinen zu erheben, ohne welches sich keine Wissenschaft bilden kann.

Ist aber der Geist des Schülers erstarkt und befähigt worden, das Allgemeine zu erkennen, so kann der Lehrer zur wissenschaftlichen Methode übergehen. Diese ist die umgekehrte Ordnung von jener Sie beginnt mit dem Allgemeinen, dem Abstrakten, mit Prinzipien, Grundsätzen und Erklärungen. Sie legt zuerst ein sicheres allgemeines Fundament, auf welchem sie nun den Bau der Wissenschaft aufführt Wo jene Methode endet, fängt diese an, was bei jener der Zielpunkt war, ist bei dieser der Anfangspunkt.

Diese Bemerkungen treffen nun auch besonders diesen Abschnitt, welcher von den Logarithmen handelt. Wenige Rechenlehrer haben sich zu einem klaren Begriffe von diesem Gegenstande erhoben. Die meisten sehen ihn für eine Ritterburg an, in welche nur dem mathematischen Adel der Zutritt gestattet wird. Wären die Logarithmen auf die vorhin angegebene Weise behandelt worden, so würden viele zur Kenntniß und zum Gebrauch derselben gekommen sein, die jetzt durch die gelehrte wissenschaftliche Darstellung in den mathematischen Lehrbüchern abgeschreckt worden sind. In unserm dritten Uebungsbuche, Abschnitt VIII., habe ich es versucht, diesen vorhin angedeuteten Weg einzuschlagen, und wenn ich nicht irre, so kann jeder, der übrigens die dazu erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse besitzt, leicht zum Verstehen und zum Gebrauch der Logarithmen kommen. Ich weiß wol, daß die dortige Behandlung dieses Gegenstandes von der Vollständigkeit noch weit entfernt ist, bin aber auch der Meinung, daß der Schüler durch eine solche Darstellung fähig gemacht wird, weiter in diese Sache einzudringen, und sie nach und nach vollständiger und vollkommener aufzufassen.

§. 203. Wir wollen eine beliebige geometrische Reihe, deren erstes Glied = 1, mit einer arithmetischen Reihe, von welcher die Differenz = 1 und das erste Glied = 0 ist, verbinden und sehen, wozu solche Verbindung dienen kann.

a. Geom. Reihe 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256 , 512 , 1024
b. Arithm. Reihe 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10

Gesetzt, wir wollten 16 mit 64 multipliciren. 16mal 64 = 1024. In der geometrischen Reihe befinden sich die beiden Faktoren 16 und 64; gerade unter denselben stehen die Zahlen 4 und 6; die Summe beider ist 10. Gerade über 10 finden wir ebenfalls die Zahl 1024, das Produkt von 16 . 64. — Dividiren wir 8 in 512, so erhalten wir zum Quotienten 64. In der Reihe b finden wir die beiden Zahlen 8 und 512 ebenfalls. Unter denselben befinden sich die Zahlen 3 und 9; der Unterschied beider ist = 6; gerade über 6 finden wir den Quotient 64 wie vorher.

Wollten wir 5 ins Quadrat erheben, so multipliciren wir die unter 8 stehende Zahl 3 mit 2 = 6; über dieser 6 finden wir in der Reihe a die Quadratzahl von 8, nämlich 64. Wünschten wir die Kubikzahl von 8 zu wissen, so multipliciren wir die unter 8 stehende Zahl 3 mit 3 = 9; über dieser Zahl 9 finden wir in der Reihe a die Zahl 512 als Kubikzahl von 8. — Sollte aus 256 die Quadratwurzel gezogen werden, so suchten

wir unter 256 der Reihe a nach, welche Zahl unter derselben in der Reihe b steht = 8. Wir dividiren 8 durch 2 = 4; dieser Quotient 4 zeigt an, wo wir in der obern Reihe a die Quadratwurzel von 256, nämlich 16 finden. Wollten wir die Kubikwurzel aus 512 wissen, so dividiren wir mit 3 in die unter 512 stehende Zahl 9 = 3; die Kubikwurzel finden wir nun gerade über 3 stehen, nämlich 8. Würde die Quadratwurzel aus 64×1024 verlangt, so fänden wir nach der gewöhnlichen Berechnung $\sqrt{}(64 \times 1024) = \sqrt{}64 \cdot \sqrt{}1024 = 8 \cdot 32 = 256$. Nach den gegebenen Reihen a und b brauchen wir aber nur mit 2 in die Summe der Zahlen 6 und 10, welche unter 64 und 1024 stehen, zu dividiren, so finden wir über dem Quotient 8 in der Reihe a ebenfalls die Wurzel 256. Nun ist aber 8 die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 64 und 1024. Wäre die mittlere geometrische Proportionalzahl (256) zwischen 64 und 1024 bekannt, so würde ich gerade unter derselben die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Gliedern der arithmetischen Reihe, welche zu jenen geometrischen Gliedern gehören, finden. Unter 256 finden wir 8 als mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 6 und 10.

Bei aufmerksamer Vergleichung dieser Verfahrungsarten finden wir, daß dabei

das Multipliciren	in Addiren
» Dividiren	in Subtrahiren
» Erheben	in Multipliciren
» Wurzelausziehen	in Dividiren

verwandelt wird.

Anmerkung. Der Lehrer setze die Reihen a und b weiter fort und lasse dieselben auf die angeführte Weise von den Schülern fleißig gebrauchen. Anstatt der geometrischen Reihe mit dem Exponenten 2 setze er andere mit dem Exponenten 3 oder 4. (Siehe unser 3. Uebungsbuch Abschnitt VIII.)

§. 204. Die gegebene geometrische Reihe a läßt sich auch als eine Potenzreihe darstellen. Z. B.

a.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
	1^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
b.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Hier finden wir nun Folgendes zu merken:

1. §. 165 haben wir gesehen, daß jede Zahl auf der Potenz 0 = 1.

2. Die Potenz-Exponenten stimmen genau mit der arithmetischen Reihe b überein.

3. Die arithmetische Reihe b oder der Potenz-Exponent zeigt mit jedem Gliede an, das wievielste, aus dem Grundverhältniß 1 : 2 entsprungene Verhältniß die geometrische Reihe bis hiehin enthält. Z. B. 2^4 zeigt der Exponent 4 an, aus wie viel Grundverhältnissen — hier 1 : 2 — das Verhältniß 1 : 16 erwachsen ist. Denn 2^4 ist das vierfache Verhältniß von 1 : 2. Denn:

Digitized by Google

1 : 2
1 : 2
1 : 2
1 : 2
1 : 16 oder 1 : 2^4

Man kann also den Potenz-Exponenten immer ansehen als den Anzeiger der Anzahl von Grundverhältnissen, auf welchen das bis hieher in der geometrischen Reihe bestimmte Glied gegründet ist. Dieser Verhältnißanzeiger aber ist eben das, was man Logarithmus nennt. In der gegebenen Reihe wäre demnach 3 der Logarithmus von 8, und 9 der Logarithmus von 512.

Das Wort Logarithmus ist aus dem Griechischen genommen. Logos heißt so viel als Wort, Grund, Weisheit, Verhältniß, welche letztere Bedeutung hier zum Grunde liegt; Arithmos bedeutet Zahl; Logarithmos oder Logarithmus heißt daher Verhältnißzahl oder Verhältnißanzeiger. Die Zahl, welche einer geometrischen Reihe zum Grunde liegt oder welche durch eine ganze Reihe hindurch auf verschiedene Potenzen erhoben wurde, heißt Grundzahl oder Basis, oder auch nach einer andern Ansicht: das angenommene Verhältniß einer solchen geometrischen Reihe heißt Grundverhältniß, und die zu derselben gehörigen Logarithmen zusammengenommen bilden ein logarithmisches System.

§. 205. Die vorige zweifache Reihe a und b kann durch eine einzige vollkommen genügend bezeichnet werden, nämlich:

2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 , 2^7 , 2^8 , 2^9 , 2^{10}.

Nehmen wir eine andere Zahl, etwa 3, zur Basis einer geometrischen Reihe an, so haben wir:

c. 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , 729 , 2187 , 6561 u. s. w.
d. 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 u. s. w.

oder durch eine einzige Reihe dargestellt:

1^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 , 3^5 , 3^6 , 3^7 , 3^8 u. s. w.

Vergleichen wir diese Reihen c, d mit jenen von a und b, so finden wir sie sehr verschieden. Zu 3 in der Reihe d gehört 27 in der Reihe c; zu 3 in der Reihe b gehört 8 in der Reihe a, oder mit andern Worten: In der Reihe d ist 3 der Logarithmus zu 27, in der Reihe b aber ist 3 der Logarithmus von 8. Es ist klar, daß sowol die Logarithmen als die dazu gehörigen Zahlen sich ändern, wenn die Basis der geometrischen Reihe sich ändert. Wer daher nach jenen und ähnlichen Reihen rechnen will, der darf auch nur solche gebrauchen, welche nach einem und demselben Grundverhältniß gebildet worden sind.

§. 206. Wir haben vorhin gesehen, daß durch den Gebrauch der Logarithmen das Rechnen sehr verkürzt werden kann. Gesetzt aber, es wollte jemand etwa 379 mit 589 multipliciren oder jene Zahl in diese dividiren oder aus beiden die Quadratwurzel ziehen, so sucht er vergeblich in jenen Reihen diese Zahlen, und bei aufmerksamer Ansicht wird er bald gewahr, daß in den Reihen a und c noch viele Zahlen zwischen dem ersten und letzten Gliede fehlen. Wenn solche Reihen erhebliche Vortheile im Rechnen gewähren sollen, so müßten sie von 1 an bis zu einer

bestimmten Grenze hin alle Zahlen, nebst den dazu gehörigen Logarithmen, enthalten. Und wirklich hat man Tafeln bearbeitet, in welchen sich die Zahlen von 1 bis 10000 und andere von 1 bis 100000 und drüber befinden. Das Grundverhältniß 1 : 10 ist darin angenommen worden oder mit andern Worten: der Exponent der geometrischen Reihe ist 10.

a. Geometr. Reihe	1	10	100	1000	10000	100000
oder	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
b. Arithm. Reihe oder die Logarithmen zu a.	0	1	2	3	4	5

Auch hier sind die Zahlen der arithmetischen Reihe oder die Exponenten der Potenz-Reihe die Logarithmen zu den Zahlen in der geometrischen Reihe a. Der Logarithmus von 100000 ist 5, der Logarithmus von 100 ist 2; zu 10000 gehört der Logarithmus 4. Betrachten wir die geometrische Reihe a mit einiger Aufmerksamkeit, so überzeugen wir uns gleich, daß hier viele Zahlen fehlen. Zwischen 10 und 100 allein fehlen 89 Zahlen. Der Logarithmus von 10 ist 1, und 2 ist der Logarithmus von 100; welches sind aber die Logarithmen zu den Zahlen, welche zwischen 10 und 100 liegen? Der Logarithmus von 1 ist 0, von 10 ist er 1; wie heißen aber die Logarithmen zu 2, 3, 4 .... 9? Diese sind offenbar größer als 0, aber kleiner als 1, mithin ächte Brüche.

§. 207. Es ist früher gelehrt worden, daß die Quadratwurzel aus dem Produkt zweier Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl zu diesen beiden Zahlen ist; daß ferner, wenn man die Summe zweier Zahlen durch 2 dividirt, der Quotient die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen diesen beiden gegebenen Zahlen bildet. Wir haben gesehen, in welcher nothwendigen Verbindung beide Proportionalzahlen zu einander stehen. Verbindet man nämlich eine arithmetische Reihe mit einer geometrischen, so deutet die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen zwei Gliedern der arithmetischen Reihe genau auf die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen denselben Gliedern der geometrischen Reihe, und umgekehrt kann jene durch diese bestimmt werden. Vermittelst dieser Sätze haben viele die Logarithmen zu den Zwischenzahlen von 1 bis 10, von 10 bis 100, von 100 bis 1000 u. s. w. berechnet. Welch ein ausdauernder Fleiß dazu erfordert wird, wollen wir an einem einzigen Beispiele zeigen. Der Logarithmus zu 3 soll gefunden werden; der Logarithmus von 1 = 0 und von 10 = 1.

$$a\begin{cases} 1 \cdot 10 = 10; \quad \sqrt{10} = 3{,}16227766 \ldots = \text{Zahl} \\ 0 + 1 = 1; \quad \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5 \ldots\ldots\ldots = \text{Log.} \end{cases}$$

Wenn es nun auf keine große Genauigkeit ankäme, so könnte man 0,5 als den Logarithmus zu 3 annehmen; der Decimalbruch würde dann weggeworfen. Indeß hat man sich, der Sicherheit und Genauigkeit im Rechnen wegen, bemüht, der Wahrheit näher zu kommen, und zwar so nahe, daß das Mangelnde, wegen seiner gänzlichen Unbedeutendheit, für nichts geachtet wurde.

Man fuhr nun auf gleiche Weise fort, und suchte zwischen 1 und 3,16227 .... von neuem die mittlere geometrische und zwischen 1 und 0,5 die mittlere arithmetische Proportionalzahl und so immerfort, bis man eine Zahl erhielt, welche der 3 so nahe kam, daß man sie unbedenklich für 3 nehmen konnte. Also:

b) $\begin{cases} 1 \,.\, 3{,}16227\ldots = 3{,}16227\ldots; \dot{\gamma}\ 3{,}1622\ldots = 1{,}7782\ldots \text{ Zahl} \\ 0+0{,}5 \quad\quad = 0{,}5 \quad\quad ; \quad \frac{0{,}5}{2} \quad = 0{,}25 \quad \text{Log.} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}16227\ldots \times 1{,}7782\ldots) = 2{,}37137\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}5 + 0{,}25}{2} = 0{,}375\ldots. = \text{Log.} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}16227\ldots \times 2{,}37137) = 2{,}73841\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}5 + 0{,}375}{2} = 0{,}4375\ldots. = \text{Log.} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}16227\ldots \times 2{,}73841) = 2{,}94272\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}5 + 0{,}4375}{2} = 0{,}46875\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}16227\ldots \times 2{,}94272\ldots) = 3{,}05036\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}5 + 0{,}46875}{2} = 0{,}48437\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}05036\ldots \times 2{,}94272\ldots) = 2{,}99772\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}46875\ldots + 0{,}48437\ldots}{2} = 0{,}47656\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}05036\ldots \times 2{,}99772\ldots) = 3{,}02399\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}48437\ldots + 0{,}47656\ldots}{2} = 0{,}480469\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}02399\ldots \times 2{,}99772\ldots) = 3{,}01082\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}480469\ldots + 0{,}47656\ldots}{2} = 0{,}47851\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}01082\ldots \times 2{,}99772\ldots) = 3{,}00426\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}47851\ldots + 0{,}47656\ldots}{2} = 0{,}47754\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}00426\ldots \times 2{,}99772\ldots) = 3{,}00099\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}47754\ldots + 0{,}47656\ldots}{2} = 0{,}47705\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

m) $\begin{cases} \dot{\gamma}\ (3{,}00099\ldots \times 2{,}99772\ldots) = 2{,}99917\ldots = \text{Zahl} \\ \frac{0{,}47705\ldots + 0{,}47656\ldots}{2} = 0{,}47681\ldots = \text{Log.} \end{cases}$

$$n\begin{cases}\sqrt[2]{(3{,}00099\ldots \times 2{,}99917\ldots)} = 3{,}00008\ldots = \text{Zahl}\\ \dfrac{0{,}47705\ldots + 0{,}47681\ldots}{2} = 0{,}47693\ldots = \text{Log.}\end{cases}$$

$$o\begin{cases}\sqrt[2]{(3{,}00008\ldots \times 2{,}99917\ldots)} = 2{,}99962\ldots = \text{Zahl}\\ \dfrac{0{,}47693\ldots + 0{,}47681\ldots}{2} = 0{,}47687\ldots = \text{Log.}\end{cases}$$

$$p\begin{cases}\sqrt[2]{(3{,}00008\ldots \times 2{,}99962\ldots)} = 2{,}99984\ldots = \text{Zahl}\\ \dfrac{0{,}47693\ldots + 0{,}47687\ldots}{2} = 0{,}47690\ldots = \text{Log.}\end{cases}$$

$$q\begin{cases}\sqrt[2]{(3{,}00008\ldots \times 2{,}99984\ldots)} = 2{,}99996\ldots = \text{Zahl}\\ \dfrac{0{,}47693\ldots + 0{,}47690\ldots}{2} = 0{,}47692\ldots = \text{Log.}\end{cases}$$

$$r\begin{cases}\sqrt[2]{(3{,}00008\ldots \times 2{,}99996\ldots)} = 3{,}00002\ldots = \text{Zahl}\\ \dfrac{0{,}47693\ldots + 0{,}47692\ldots}{2} = 0{,}47692\ldots = \text{Log.}\end{cases}$$

$$s\begin{cases}\sqrt[2]{(3{,}00002\ldots \times 2{,}99996\ldots)} = 2{,}99999\ldots = \text{Zahl}\\ \dfrac{0{,}47692\ldots + 0{,}47692\ldots}{2} = 0{,}47692\ldots = \text{Log.}\end{cases}$$

Anmerkung. Bis f hin ergab sich immer eine unter 3 liegende Zahl, welche wir dann immer mit 3,16227 . . . zusammenstellten; bei f aber steigt die Zahl über 3, doch nicht so hoch, als 3,16227 . . . Daher wird diese letztere auch nicht weiter gebraucht.

§. 208. Im vorhergehenden Paragraph fanden wir zuletzt die Zahl 2,99999 . . . ., welche von 3 nur um $^1/_{100000}$, ja wenn die Decimalstellen vermehrt werden, noch nicht um $^1/_{100000}$ verschieden ist. Nimmt man nun diese Zahl für 3 an, so gehört als Logarithmus dazu 0,47692 .. Vergleicht man diesen mit den Logarithmen in den berechneten Tafeln, so finden wir ihn dagegen um 0,0002 zu klein. Vorausgesetzt, daß wir bei der Berechnung keinen Fehler gemacht haben, rührt dieser Unterschied theils daher, daß hier nur 5 Decimalstellen sind genommen worden, theils von dem Wegwerfen der sechsten und folgenden Decimalstellen, oder der Erhöhung der sechsten Decimalstelle zu einem Ganzen der fünften Stelle. In den kleinen Tafeln, in welchen die Logarithmen auf 5 Decimalstellen berechnet sind, finden wir für 3 den Log. 0,47712; in Vega's Tafeln mit 7 Decimalstellen: 0,4771213; in Klausberg's demonstrativer Rechenkunst mit 32 Decimalstellen: 0,47712125471966243729502790325511 . . . — Bei f finden wir für 2,99999 den Logarithmus eben so groß wie für 3,00002. Der Unterschied von 0,00003 dieser beiden Zahlen änderte in unserer Berechnung den Logarithmus nicht mehr, ja bei q fanden wir für 2,99996 schon den Log. 0,47692 . . .

Mit dem Logarithmus 3 sind aber auch die Logarithmen für 9, 27, 81 u. s. w. gefunden, so wie mit dem Logarithmus für 2 auch die Logarithmen für 4, 8, 16 u. s. w. leicht zu ermitteln sind. Sind die Logarithmen

für 2 und 3 bekannt, so hat man sie auch für 6 = 2 . 3; für 12
2 . 3 oder 2 . 6; für 18 = 3 . 6 u. s. w. Man addirt nämlich die
rithmen der Faktoren, so ist diese Summe der Logarithmus des Pro
wie wir weiterhin sehen werden. Es ist also nur nöthig, die Logari
für die Primzahlen aufzusuchen, freilich eine sehr mühsame Arbeit.
kann zwar jetzt auf einem kürzeren Wege die Logarithmen finden,
setzt dieß eine höhere Kenntniß der Mathematik voraus, welche den
dern der Logarithmen abging. Auf eine ähnliche, doch etwas kürzere
als die vorhin gezeigte, sind die Logarithmen zuerst berechnet worde

1. Anmerkung. Man streitet darüber, welcher Nation die Ehre der Er
der Logarithmen gebühre. Gewöhnlich wird Joh. Neper (Napier, Nepa
schottischer Baron, welcher im 17. Jahrhundert lebte, für den Erfinder g
Sein Werk erschien 1614 in Edinburg unter dem Titel: mirifici logarith
canonis descriptio. Keppler machte sich damals um die Begründung u
führung dieser neuen Rechenart verdient. Etwas früher noch als Nep
Jobst Byrg, ein deutscher oder vielmehr ein Schweizer, Mathematiker und
nem des Landgrafen Wilhelm von Hessen, auf die Erfindung der Logar
weshalb ihn Keppler auch den Miterfinder der Logarithmen nennt. Bran
Schwager Byrgs, berichtet vom Jahr 1630, „daß er vor 20 und
Jahren Jobst Byrg eine schöne Progreßtabul mit ihren Differenzen von
10 in 9 Ziffern calculirt, auch zu Prag 1620 drucken lassen, daß also
vention der Logarithmen nicht des Neperi, sondern von gedachtem Byrg
solches vielen wissend, und ihm auch Herr Kepplerus Zeugniß gibt) lang
erfunden." Byrgs Tafeln haben aber übrigens, nach Kästners Zeugniß, ei
andere Einrichtung als unsere gegenwärtigen logarithmischen Tafeln.
früher als Byrg, nämlich 1530, kam ein deutscher Prediger, Namen
chael Stiefel, auf die Spur der logarithmischen Berechnungen. Sein
„arithmetica integra" kam 1514 heraus, und enthält ebenfalls eine Vergl
der geometrischen und arithmetischen Progression. Da aber zwischen de
dern der geometrischen Reihe Zahlen fehlten, so war dieses Werk wenig
drauchen. Henri Bryggs, Professor in London, später in Orford, g
logarithmischen Tafeln dadurch eine bessere Einrichtung, daß er das Ver
1 : 10 als Basis annahm, woher es kommt, daß alle, nach dieser Basis
neten logarithmischen Tafeln noch jetzt häufig Bryggische Logarithmen
Brygg's Werk erschien 1624 zu London unter dem Titel: „arithmetica logarith
Nachher sind von vielen andern Mathematikern logarithmische Tafeln her
geben worden. Außer den Werken von Vlacq, Wolf und Schulze führ
die logarithmischen Tabellen von Vega, Callet und die neuen von Ga
(Wien bei Wimmer 1827) als vorzüglich an. Die Tafeln von Lalande
Decimalziffern sind sehr bequem; die von Moritz von Prasse (Leipzig
sind sehr wohlfeil und doch recht brauchbar. Letztere sind, mit einer
Veränderung in unserm 3. Uebungsbuche benutzt worden. Empfehlenswer
auch „die Logarithmen erleichtert für den Unterricht" u. s. w. von Dr. Ro
Berlin, 1819. Bei Duncker und Humblot.

2. Anmerkung. Der Lehrer lasse die Schüler auf die vorher angezeigte W
Logarithmen für die Primzahlen, welche zwischen 1 und 10 liegen, also
3, 5 und 7 selbst berechnen. Es ist gut, wenn der Schüler aus eigener
rung überzeugt wird, was wir auch auf dem wissenschaftlichen Gebiete
Vorfahren zu danken haben. Dieß bewahrt die Jugend vor Geringschätzun
Nichtachtung wissenschaftlicher Arbeiten der Vorzeit. —

§. 209. Kürzere und zweckmäßigere Darstellung Logarithmen.

Wir haben vorhin gesehen, daß man die Logarithmen auc
Exponenten einer, aus derselben Basis gebildeten Potenzreihe an
kann, oder kürzer gesagt: die Exponenten einer geometrisc
Reihe sind die Logarithmen zu derselben; z. B.

a. Logarithmen 0 , 1 , 2 , 3 , 4
b. Geom. Reihe mit dem Exponenten 10 1 , 10 , 100 , 1000 , 10000
c. Potenz-Reihe mit der Basis 10 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4

Zu dem Expon. oder Log. 1 gehört die Zahl 10
" " " " " 2 " " " 100

Welches ist aber nun der Expon. oder der Log. zu den Zahlen, welche zwischen 10 und 100 liegen. Natürlicher Weise muß dieser Exponent größer als 1 und kleiner als 2, mithin 1 und ein Bruch sein, auch ist es klar, daß verschiedenen Zahlen, etwa 13, 57, 89 u. s. w. auch verschiedene Bruch-Exponenten zukommen werden. Wir können aber diese verschiedenen Exponentialbrüche gleichnamig in Decimalbrüchen darstellen. Bezeichnen wir allgemein diesen Nenner mit z, so können wir sagen:

$10 = 10^1$ mit dem Log. 1
$11 = 10^1 + \frac{a}{z}$ " " " $1 + \frac{a}{z}$
$12 = 10^1 + \frac{b}{z}$ " " " $1 + \frac{b}{z}$
$13 = 10^1 + \frac{c}{z}$ " " " $1 + \frac{c}{z}$
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
$100 = 10^2$ mit den Log. 2
$101 = 10^2 + \frac{m}{z}$ " " " $2 + \frac{m}{z}$
$102 = 10^2 + \frac{n}{z}$ " " " $2 + \frac{n}{z}$
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
$1000 = 10^3$ mit den Log. 3
$1001 = 10^3 + \frac{t}{z}$ " " " $3 + \frac{t}{z}$
$1002 = 10^3 + \frac{u}{z}$ " " " $3 + \frac{u}{z}$ u. s. w.

§. 210. Zu verschiedenen Zahlen gehören, wie eben gesagt, auch verschiedene Bruch-Exponenten und umgekehrt, je nachdem die gebrochenen Potenz-Exponenten verschieden sind, je nachdem werden auch die zu denselben gehörigen Zahlen verschieden sein. Z. B.

zu 10^1 gehört die Zahl 10;

zu $10^{1}/_{2}$ gehört die Zahl $\sqrt{10} = 3 , 16227766$

zu $10^{1}/_{4}$ gehört die Zahl $\sqrt{10} = \sqrt{(\sqrt{10})}$
$= \sqrt{3 , 16227766} = 1 , 778279 \ldots$

zu $10^{1}/_{10}$ o. $10^{0,1}$ geh. d. Zahl $\sqrt[10]{10^1} = \sqrt{(\sqrt{10})}$

So wie wir in den beiden vorhergehenden Kapiteln eine Reg ausfindig zu machen suchten, die Wurzel einer Potenz vom zweiten u dritten Grade oder $\sqrt[2]{r}$ und $\sqrt[3]{r}$ darzustellen, so könnten wir hier ebe falls eine Formel finden, nach welcher wir $\sqrt[5]{r}$ darzustellen im Stan wären. Der Buchstabenrechner braucht nur $a + b$ auf die fünf Potenz zu erheben, so hat er diese Formel gefunden. Es würde sic darnach ergeben, daß $\sqrt[5]{10} = 1{,}584893$, mithin $10^{0,4} = \sqrt[2]{10} =$ $\sqrt[2]{(\sqrt[5]{10})} = \sqrt[5]{1{,}584893} = 1{,}258925 \ldots$ Zu dem Log. 0 gehörte also die Zahl 1,258925. Wir haben aber in den vorigen P ragraphen gesehen, daß man die Logarithmen der Faktoren addiren mu wenn man den Log. ihres Produkts erhalten will, wie sich späterhin no deutlicher ergeben wird. Demnach ergibt sich nun weiter Folgende

a. Log.	$0{,}1$	$=$	die Zahl	1	, 258925 . .
"	$0{,}1 + 0{,}1$	$=$	" "	1	, 258925 $\times$ 1 , 258925
b. "	$0{,}2$	$=$	" "	1	, 584893 . . . . .
"	$0{,}2 + 0{,}1$	$=$	" "	1	, 584893 $\times$ 1 , 258925 . . .
c. "	$0{,}3$	$=$	" "	1	, 995262 . . .

Auf diese Weise könnte man mit nicht gar großer Mühe auch d Log. zu 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 finden. Ist aber der Werth f $10^{0,1} = \sqrt[2]{10}$ bekannt, so kann man auch den Werth für 10^{0} $= \sqrt[10]{10}$ finden; denn $\sqrt[10]{10} = \sqrt[2]{(\sqrt[5]{10})} = \sqrt[2]{1{,}258925} =$ $\sqrt[2]{(\sqrt[5]{1{,}258925})}$ und $= 1{,}02329299) \ldots$ und ebenso ist d tausendste Wurzel aus $10\ \sqrt[1000]{10} = \sqrt[2]{(\sqrt[1000]{10})} = \sqrt[2]{(\sqrt[2]{[\sqrt[10]{10}}}$ $= \sqrt[2]{(\sqrt[2]{1{,}258925})} = \sqrt[2]{1{,}02329299} = \sqrt[2]{(\sqrt[5]{1{,}0232929}}$ $= 1{,}0023052 \ldots$

Da, wo es auf keine große Genauigkeit ankommt, könnte man d bei c gefundene Zahl 1,995262 . . . . für 2 annehmen, zu welch dann der Log. 0,3 gehörte; oder $10^{0,3} = 2$. Es ist aber in der Ma thematik überhaupt von Wichtigkeit, den Werth einer Zahl möglich genau zu wissen, wenn er sich etwa nicht ganz vollständig ermitteln läß

In den meisten Fällen ist indeß eine Annäheruug zu dem wahr Werthe mit 5 oder 6 bis 7 Decimalstellen mehr als hinreichend. Um ab die Logarithmen für alle verlangten Zahlen zu finden, brauchen nur f jede Stelle des zehntheiligen Exponential-Bruches alle Einer nebst d dazu gehörigen Zahlen gesucht zu werden, also für die Bruch-Exponente

0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9
0,01 ; 0,02 ; 0,03 ; 0,04 ; 0,05 ; 0,06 ; 0,07 ; 0,08 ; 0,09
0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005; 0,006; 0,007; 0,008; 0,009

Es sind wirklich solche Tafeln berechnet worden, und wir woll die, welche sich in Kramps Anfangsgründen der Rechenkunst befinde mittheilen, und zwar nach der Anordnung in dem Handbuche der allg meinen Arithmetik von Eg en.

Potenztäfelchen.

I.

10^{10}	=	10000000000,0
10^{9}	=	1000000000,0
10^{8}	=	100000000,0
10^{7}	=	10000000,0
10^{6}	=	1000000,0
10^{5}	=	100000,0
10^{4}	=	10000,0
10^{3}	=	1000,0
10^{2}	=	100,0
10^{1}	=	10,0
10^{0}	=	1,0

II.

$10^{0,9}$	=	7,943282347243
$10^{0,8}$	=	6,309573444802
$10^{0,7}$	=	5,011872336273
$10^{0,6}$	=	3,981071705535
$10^{0,5}$	=	3,162277660168
$10^{0,4}$	=	2,511886431510
$10^{0,3}$	=	1,995262314969
$10^{0,2}$	=	1,584893192461
$10^{0,1}$	=	1,258925411794

III.

$10^{0,09}$	=	1,230268770812
$10^{0,08}$	=	1,202264434617
$10^{0,07}$	=	1,174897554940
$10^{0,06}$	=	1,148153621476
$10^{0,05}$	=	1,122018454302
$10^{0,04}$	=	1,096478196143
$10^{0,03}$	=	1,071519305233
$10^{0,02}$	=	1,047128548051
$10^{0,01}$	=	1,023292992281

IV.

$10^{0,009}$	=	1,020939483708
$10^{0,008}$	=	1,018591388054
$10^{0,007}$	=	1,016248692871
$10^{0,006}$	=	1,013911385737
$10^{0,005}$	=	1,011579454260
$10^{0,004}$	=	1,009252886077
$10^{0,003}$	=	1,006931668852
$10^{0,002}$	=	1,004615790278
$10^{0,001}$	=	1,002305238079

V.

$10^{0,0009}$	=	1,002074475336
$10^{0,0008}$	=	1,001843765724
$10^{0,0007}$	=	1,001613109228
$10^{0,0006}$	=	1,001382505837
$10^{0,0005}$	=	1,001151955538
$10^{0,0004}$	=	1,000921458319
$10^{0,0003}$	=	1,000691014168
$10^{0,0002}$	=	1,000460623073
$10^{0,0001}$	=	1,000230285021

VI.

$10^{0,00009}$	=	1,000207254133
$10^{0,00008}$	=	1,000184223775
$10^{0,00007}$	=	1,000161193947
$10^{0,00006}$	=	1,000138164649
$10^{0,00005}$	=	1,000115135882
$10^{0,00004}$	=	1,000092107645
$10^{0,00003}$	=	1,000069079939
$10^{0,00002}$	=	1,000046052762
$10^{0,00001}$	=	1,000023026116

VII.

$10^{0,000009}$	=	1,000020723481
$10^{0,000008}$	=	1,000018420850
$10^{0,000007}$	=	1,000016118226
$10^{0,000006}$	=	1,000013815606
$10^{0,000005}$	=	1,000011512992
$10^{0,000004}$	=	1,000009210383
$10^{0,000003}$	=	1,000006907779
$10^{0,000002}$	=	1,000004605181
$10^{0,000001}$	=	1,000002302588

VIII.

$10^{0,0000009}$	=	1,000002072329
$10^{0,0000008}$	=	1,000001842070
$10^{0,0000007}$	=	1,000001611811
$10^{0,0000006}$	=	1,000001381552
$10^{0,0000005}$	=	1,000001151293
$10^{0,0000004}$	=	1,000000921034
$10^{0,0000003}$	=	1,000000690776
$10^{0,0000002}$	=	1,000000460517
$10^{0,0000001}$	=	1,000000230259

Vermittelst dieser Tafeln sind wir im Stande, zu jedem Potenz-Exponenten, er mag nun bloß aus einem Decimalbruche oder aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche bestehen, die dazu gehörige Potenz zu finden und umgekehrt aus dieser jenen Exponenten. Z. B. Wie heißt

Digitized by Google

der Werth von $10^{0,54321}$ in 9 Decimalstellen; mit andern Worten: Wie heißt die Zahl zu dem Log. 0,54321? Der Decimalbruch enthält

0,5	oder	5 Zehntel
0,04	"	4 Hundertel
0,003	"	3 Tausendtel
0,0002	"	2 Zehntausendtel
0,00001	"	1 Hunderttausendtel

Die Forderung ist hier die hunderttausendste Wurzel aus 10 auf der 54321sten Potenz darzustellen, also $\sqrt[100000]{10^{54321}} = 10^{0,54321}$.

In der Tafel finden wir

für $10^{0,5}$	den Werth	3,162277660
" $10^{0,04}$	" "	1,096478196
" $10^{0,003}$	" "	1,006931669
" $10^{0,0002}$	" "	1,000460623
" $10^{0,00001}$	" "	1,000023026

Nun ist, wie vorher gezeigt worden, $10^{0,5} + 10^{0,04} + 10^{0,003} + 10^{0,0002} + 10^{0,00001}$ der Log. von 3,162277660 mal 1,096478196 mal 1006931669 mal 1,000460623 mal 1,000023026 = 3,493151804 oder abgekürzt 3,49315. Also haben wir $10^{0,54321}$ 3,49315 ... oder anders ausgedrückt: zu dem Log. 0,54321 gehört die Zahl 3,49315.... welches mit den logarithm. Tafeln übereinstimmt.

§. 211. Wollen wir nach diesen Tafeln zu einer gewissen Zahl den Logarithmus finden, so müssen wir umgekehrt verfahren. Z. B. 40 sei die Zahl, zu welcher der Log. gesucht wird. Da der Log. von 10 = 1 und von 100 = 2, so fällt der Log. für 40 zwischen 1 und 2 und er wird also aus 1 und einem Bruche bestehen. Der Log. eines Produkts ist, wie wir gesehen haben, gleich der Summe der Log. von dessen Faktoren. Wir dividiren daher 10^1 oder 10 in 40 = 4. Wir haben nun noch den Log. für 4 zu suchen oder was dasselbe ist, 10 auf eine Potenz zu erheben, deren Werth = 4. In Nr. II. der gegebenen Tafel finden wir a 3,981071705537 = 10^{06}, welcher Werth der Zahl 4 am nächsten kommt. Dividiren wir diese in jene, so erhalten wir

b. 3,981071705537 : 4,000000000000 = 1,004754572603.

Nun suchen wir in den Tafeln nach, welcher Potenz-Exponent diesem gefundenen 1,00475.... am nächsten kommt. Die zwei ersten Decimalstellen enthalten Nullen, welche wir ebenfalls erst in Taf. IV. antreffen, ein Beweis, daß der Exponentialbruch in den zwei ersten Decimalstellen auch nur zwei Nullen hat. In der IV. Tafel kommt 1,004615790277 mit der Potenz $10^{0,002}$ dem Quotienten bei b am nächsten. Wir dividiren nun

c. 1,004615790277 : 1004754572603 = 1,00013814927.

In Tafel VI. finden wir die Zahl 1,000138164649, welche dem Quotienten bei c so nahe kommt, daß erst in der 8. Decimalstelle eine Abweichung von noch nicht ganz 2 Hundertmillionteln sich vorfindet. Wir sehen daher diese Zahl dem Quotienten bei c gleich, da der Unterschied für die nächstfolgenden Decimalstellen noch keine Einer bewirkt, wie wir in den log. Tafeln finden.

Wir haben nun gefunden:

a. $3{,}981071705537 = 10^{0{,}6}$

b. $1{,}004616790277 = 10^{0{,}002}$

c. $1{,}0001381\ldots\ldots = 10^{0{,}00006}$

Nun ist $10^{0{,}6} + 10^{0{,}002} + 10^{0{,}0006} = 10^{0{,}60206}$ und 0,60206 ist der Logarithmus von $3{,}981071705537 \times 1{,}004615790277 \times 1{,}000138164649 = 4{,}000000076$, welche Zahl man unbedenklich für 4 nehmen kann, da der Unterschied nur 76 Tausendmilliontel beträgt. Noch unbedeutender würde aber dieser Unterschied ausgefallen sein, wenn wir vorher auf den Unterschied des Quotienten bei e von der Zahl in der Tafel Rücksicht genommen hätten.

Der Log. von $10 = 1$
" " " $4 = 0{,}60206$
$40 = 1{,}60206$

In Vega's Tafeln finden wir zu 40 den Log. 1,6020600, bei Klausberg 1,60205999 .....

§. 212. Vergleichen wir die beiden Reihen

a. 1 , 10 , 100 , 1000 , 10000 , 100000

b. 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5

mit Aufmerksamkeit, so finden wir noch Folgendes:

1. Die Anzahl der Ziffern jedes Gliedes in der Reihe a ist um 1 größer als die, diesem Gliede zukommende Zahl in der untern Reihe b, oder mit andern Worten: die Anzahl der Ziffern jeder beliebigen Zahl ist um 1 größer als die dazu gehörige logarithmische Zahl. Z. B. Die Zahl 1000 hat 4 Ziffern, der Logarithmus von 1000 ist 3. Man kann also aus der Anzahl der Ziffern einer Zahl auf die Größe des Logarithmus und umgekehrt von diesem auf die Größe der Zahl schließen.

2. Der Logarithmus von 1 ist $= 0$, der Log. von 10 ist $= 1$; alle Zahlen, welche zwischen 1 und 10 liegen, haben zum Logarithmus eine Zahl, welche größer als 0, aber kleiner als 1, mithin ein ächter Bruch ist. Der Logarithmus von 100 ist 2; alle Zahlen, welche sich zwischen 10 und 100 befinden, sind größer als 1, aber kleiner als 2, folglich 1, nebst einem ächten Bruche $(= 1 + \frac{p}{z})$. Der Log. von 1000 ist 3; alle Zahlen, welche zwischen 100 und 1000 fallen, haben einen Logarithmus, welcher größer als 2, aber kleiner als 3 ist, mithin 2 nebst einem Bruche $(= 2 + \frac{q}{z})$. Der Log. von $10000 = 4$; alle Zahlen, welche zwischen 1000 und 10000 liegen, haben zum Log. 3 nebst einem Bruche $(= 3 + \frac{r}{z})$ u. s. w.

Die ganze Zahl des Logarithmus, desgleichen bei den Zahlen unter 10 die 0 wird die Kennziffer oder die Charakteristik (Figura characteristica) auch wol der Index genannt. Der, der Kennziffer beigesellte Bruch heißt Zugabe (Mantissa); sie wird von der Kennziffer durch ein Komma getrennt.

Digitized by Google

§. 213. Um den Gebrauch und die Einrichtung der logarithmischen Tafeln zu zeigen, wollen wir die Zahlen von 1 bis 113 nebst ihren Logarithmen hersetzen.

Zahl	Logarithm.	Zahl	Logarithm.	Zahl	Logarithm.	Zahl	Logarithm.	Zahl	Logarithm.
0	— ∞								
1	0,00000	21	1,32222	41	1,61278	61	1,78533	81	1,90849
2	0,30103	22	1,34242	42	1,62325	62	1,79239	82	1,91381
3	0,47712	23	1,36173	43	1,63347	63	1,79934	83	1,91908
4	0,60206	24	1,38021	44	1,64345	64	1,80618	84	1,92428
5	0,69897	25	1,39794	45	1,65321	65	1,81291	85	1,92942
6	0,77815	26	1,41497	46	1,66276	66	1,81954	86	1,93450
7	0,84510	27	1,43136	47	1,67210	67	1,82607	87	1,93952
8	0,90309	28	1,44716	48	1,68124	68	1,83251	88	1,94448
9	0,95424	29	1,46240	49	1,69020	69	1,83885	89	1,94939
10	1,00000	30	1,47712	50	1,69897	70	1,84501	90	1,95424
11	1,04139	31	1,49136	51	1,70757	71	1,85126	91	1,95904
12	1,07918	32	1,50515	52	1,71600	72	1,85733	92	1,96379
13	1,11394	33	1,51851	53	1,72428	73	1,86332	93	1,96848
14	1,14613	34	1,53148	54	1,73239	74	1,86923	94	1,97313
15	1,17609	35	1,54407	55	1,74036	75	1,87506	95	1,97772
16	1,20412	36	1,55630	56	1,74819	76	1,88081	96	1,98227
17	1,23045	37	1,56820	57	1,75587	77	1,88649	97	1,98677
18	1,25527	38	1,57978	58	1,76343	78	1,89209	98	1,99123
19	1,27875	39	1,59106	59	1,77085	79	1,89763	99	1,99564
20	1,30103	40	1,60206	60	1,77815	80	1,90309		

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	646	689	732	775	817
102	860	903	945	988	,030	,072	,115	,154	,199	,242
103	01 284	326	368	410	452	494	539	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	,036	,078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	,019	,060	,100	,141	,181	,222	,262	,302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	,021	,060	,100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	,038	,077	,115	,154	,192	,231	,269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652

In der 1., 3., 5., 7. und 9. senkrechten Reihe stehen die Zahlen, in der 2., 4., 6., 8. und 10. Reihe stehen die zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen, so daß wir zu den Logarithmen die Zahlen und zu diesen wieder die Log. bestimmen können. Wir finden z. B. hier zu der Zahl 17 den Log. 1,23045 . . ., zu 50 den Log. 1,69897 . . .; zu dem Log. 1,97772 die Zahl 95. Bei den hier mitgetheilten Zahlen von 100 bis 105 treffen wir eine andere Einrichtung an. Wir finden nämlich hier keine

Kennziffer angegeben. Zur Ersparung des Raumes hat man diese weggelassen, weil man ja ohnehin aus der Anzahl der Ziffern einer Zahl die Kennziffer leicht bestimmen kann. 100 hat z. B. 3 Ziffern, daher wird die Kennziffer, wie vorhin gelehrt, 2 sein. Der Log. von 100 ist 2,00000; von 101 = 2,00432 . . ., von 102 = 2,00860 oder ohne Kennziffer: Log. 100 = 00000 (d. i. 3 — 1 = 2); Log. von 101 = 00432 (d. i. 2,00432); von 102 = 00860 (d. i. 2,00860). Da hier die zwei ersten Decimalziffern 00 immer dieselben sind, so hat man sie nur einmal, nämlich bei 100 gesetzt; beim Gebrauche muß man diese noch zufügen.

In der obersten Reihe finden wir, von 100 an, weit auseinander gesetzt, die natürliche Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vermittelst dieser Zahlen wird es möglich, die Logarithmen zu den Zahlen zu bestimmen, welche in die Tausende hinüber gehen. Z. B. Es soll der Log. zu 1009 gefunden werden. Zu den drei ersten Ziffern oder zu 100 wissen wir den Log. 2; die letzte Ziffer 9 suchen wir in der obern wagerechten Reihe auf. Hier finden wir gerade unter 9 in der Reihe, welche mit 100 beginnt, die Zahl 389, welches die drei letzten Decimalziffern des Log. zu 1009 sind, denen wir die zwei ersten zu 100 gehörigen Decimalziffern vorsetzen. So finden wir denn zu 1009 den Log. 3,00389. Ein anderes Beispiel. Der Log. zu 1057 wird gesucht. Wir nehmen zuerst die Zahl 105 und schreiben von deren Log. die zwei ersten Decimalziffern 02 nieder. Jetzt suchen wir in der obern Reihe die Zahl 7, gehen von dieser senkrecht herunter bis in die Reihe der 105. Hier finden wir die 3 letzten Decimalziffern 407, welche zu dem Log. von 1057 gehören. Die Zahl 1057 hat 4 Ziffern, die Kennziffer des zu ihr gehörigen Log. ist also 4 — 1 = 3; der Log. von 1057 ist daher = 3,02407.

Wäre der Log. 3,02407 gegeben und wir sollten dazu die Zahl suchen, so müßten wir gerade umgekehrt verfahren. Die Kennziffer 3 zeigt uns eine 4ziffrige Zahl, also Tausende an, welche wir aber in dieser Tafel nicht finden. Wir vermindern deshalb die Kennziffer um 1, so haben wir 2,02407. Nun suchen wir die zwei ersten Decimalziffern 02 in der Tafel auf; wir finden sie neben 105, die drei letzten Decimalziffern 407 finden wir in derselben Reihe rechts; gerad über diesen, in der obersten Reihe steht 7, welche wir der Zahl 105 noch hinzufügen. Zu dem Log. 3,02407 gehört also die Zahl 1057.

Einige Decimalbrüche sind mit einem Sternchen bezeichnet. Ein Beispiel wird uns die Bedeutung desselben klar machen. In der Reihe der Zahl 102 steht * 030. Suchten wir etwa den Log. zu 1023, so würden wir auf die vorhin angezeigte Weise 300988, für die Zahl 1024 aber 3,00030 finden. Der Log. für 1024 wäre demnach kleiner als der Log. für 1023, welches doch nicht sein kann. Hier deutet nun das Sternchen bei 030 an, daß wir die zwei ersten Decimalziffern der nächstfolgenden Zahl 103 nehmen sollen, nämlich 01. Der Log. von 1024 ist also nicht 3,00030, sondern 3,01030.

§. 214. Die log. Tafeln können nun eben so gebraucht werden, wie oben die arithmetischen und geometrischen Reihen.

Digitized by Google

1. Beispiel. Es soll 6 mit 9 multiplicirt werden.

Log. von 6 ist 0,77815
„ „ 9 „ 0,95424
1,73239

Zu dem Log. 1,73239 finden wir in der Tafel die Zahl 54 als das richtige Produkt von 6 mal 9.

Die Summe der Logarithmen von zwei oder mehrern Faktoren ist der Logarithmus des Produkts aus denselben.

2. Beispiel. Es soll 8 in 72 dividirt werden.

Der Log. von 72 = 1,85733
„ „ „ 8 = 0,90309
0,95424

Zu diesem Log. finden wir in der Tafel die Zahl 9.

Der Unterschied der Logarithmen des Dividends und Divisors ist der Logarithmus des Quotienten.

3. Beispiel. Welches ist die Quadratzahl von 7?

Log. von 7 = 0,84510
Der Log. von 7 mal 7 = 0,84510 + 0,84510 = 1,69020
oder Log. von 7 = 0,84510
2
1,69020

Die Zahl zu diesem Log. ist $49 = 7^2$.

Der doppelte Logarithmus einer Zahl ist der Logarithmus für die Quadratzahl derselben.

4. Beispiel. Wie heißt die Kubikzahl von 4?

Log. von 4 = 0,60206
3
1,80618. Zu diesem Log. gehört die Zahl $64 = 4^3$.

Der dreifache Logarithmus einer Zahl ist der Logarithmus für deren Kubikzahl.

5. Beispiel. Welche Zahl ergibt sich, wenn 2 auf die sechste Potenz erhoben wird?

Log. von 2 = 0,30103
6
Log. 1,80618. Dazu gehört die Zahl $64 = 2^6$.

Der sechsfache Logarithmus einer Zahl ist der Logarithmus für die sechste Potenz derselben.

Allgemein: Der nfache Logarithmus einer Zahl ist der Logarithmus für die nte Potenz derselben.

6. Beispiel. Wie heißt die Quadratwurzel von 36?

Log. von 36 = 1,55630

$\frac{1,55630}{2} = 0,77815$. Hierzu gehört die Zahl $6 = \sqrt{36}$.

Die Hälfte des Logarithmus einer Quadratzahl ist der Logarithmus für die Quadratwurzel derselben.

7. Beispiel. Aus 64 soll die Kubikwurzel gezogen werden.

Log. von 64 = 1,80618.

$\frac{1,80618}{3} = 0,60206$. Zu diesem Log. gehört die Zahl $4 = \sqrt[3]{64}$.

Dividirt man den Log. einer Kubikzahl durch 3, so erhält man den Log. für die Wurzel derselben.

8. Beispiel. Aus 81 soll die 4te Wurzel oder die Biquadratwurzel gezogen werden.

Log von 81 = 1,90849

$\frac{1,90849}{4} = 0,47712$, zu welchem Log. die Zahl 3 gehört.

Dividirt man den Log. einer Zahl durch 4, so erhält man die Biquadratwurzel dieser Zahl.

Allgemein ausgedrückt: Der nte Theil des Log. einer Zahl ist der Log. für die nte Wurzel derselben.

§. 215. Von 10 ist der Log. 1, von 10 mal 10 = 2, von 10 mal 10 mal 10 = 3. Von 1000 ist der Log. 3; von $\frac{1000}{10} = 3 - 1 = 2$; von $\frac{1000}{100} = 3 - 2 = 1$. Daraus ergibt sich: So oft 10 als Faktor gesetzt wird, so oft nimmt die Kennziffer des Log. einer gegebenen Zahl um 1 zu; so oft aber eine Zahl mit 10 dividirt wird, so oft wird die Kennziffer des Log. dieser Zahl um 1 vermindert.

Log. von	96	= 1,98227
" "	960	= 2,98227
" "	9600	= 3,.....
" "	96000	= 4,.....
" "	960000	= 5,.....
" "	96000	= 4,.....
" "	9600	= 3,.....
" "	960	= 2,.....
" "	96	= 1,98227

Ferner: Welche Zahl gehört zu dem Log. 6,02119? Die Kennziffer 6 finden wir in den Tafeln nicht, vermindern wir sie um 4, so daß der Log. 2,02119 wird, so finden wir dazu die Zahl 205.

Es gehört also zu dem			Log.	4,02119	die Zahl 10500
Log.	2,02119	die Zahl 105	"	5,.....	" 105000
"	3,02119	" " 1050	"	6,.....	" " 1050000

§. 216. Wird der Logarithmus zu einer Zahl verlangt, die sich nicht in den Tafeln findet, so verfährt man auf folgende Weise. Der Log. von 109689 wird gesucht. Wir schneiden rechts zwei Stellen ab, d. h. wir dividiren die Zahl durch 100, also 1096,89. Nun suchen wir den Log. zu 1096. In der Tafel finden wir 3,03981; für 109600 wird demnach der Log. sein 5,03981. Die nächst größere Zahl von 1096 ist 1097, davon der Log. 3,04021.

Von 109700 ist der Log. 5,04021
» 109600 » » » 5,03981

Unterſch. d. Zahl 100; Unterſch. d. Log. 0,00040

Der Unterſchied von 109689 und 109600 = 89. Nun ſchließen wir: Zu dem Zahlenunterſchied 100 gehört der Logarithmenunterſchied 0,00040, wie viel wird dieſer für den Zahlenunterſchied von 89 betragen?

100 : 89 = 0,00040 : x

0,0003560, oder fünfſtellig ausgedrückt:
= 0,00036. Statt 560 wird 600 genommen.

Von 1096000 iſt der Log. 5,03981
Für den Zuſatz 89 » » » 0,00036
Alſo von 109689 » » » 5,04017

Oft iſt es bequemer, eine Zahl, welche ſich nicht in den Tafeln findet, in Faktoren zu zerlegen, von welchen die Log. in den Tafeln ſtehen. Beiſpiel. Es wird geſucht der Log. zu der Zahl 10605, welche wir in den kleinen Tafeln nicht antreffen.

10605 = 105 . 101.	8025 = 105 . 75
Log. von 105 = 2,02119	Log. von 105 = 2,02119
» » 101 = 2 00432	» » 75 = 1,87506
Log. von 10605 = 4,02551	Log. von 8025 = 3,89625

Anmerkung. In einigen log. Tafeln, z. B. in denen von Vega, kann man mit Hülfe der beigefügten Proportionaltheile die Logarithmen zu großen Zahlen, ohne beſondere Berechnung leicht finden.

§. 217. Iſt der Logarithmus, zu welchem eine Zahl geſucht wird, ſo groß, daß er ſich nicht in der Tafel findet, ſo verfährt man auf folgende Weiſe: Der Log. ſei 5,95056.

Der Log. 3,95056 hat zur Zahl 8924
» » 5,95056 » » » 892400

Selten findet man aber in den Tafeln die Mantiſſe eines gegebenen Logarithmus ganz genau. Geſetzt, wir wären in der Berechnung einer Aufgabe zu dem Log. 2,79184 gekommen, ſo ſuchen wir die Zahl zu dem Log. 3,79184. In den Tafeln finden wir Log. 3,79183, welcher jenem am nächſten kommt und dazu die Zahl 6192. Der Log. iſt aber nur um $^1/_{10000}$ zu klein, welches ein ſehr unbedeutender Unterſchied iſt. Wir nehmen deshalb 3,79183 für 3,79184.

Zum Log. 3,79184 gehört die Zahl 6192
» » 2,79184 » » » 619,2

Wie gering aber der Unterſchied zu achten iſt, ergibt ſich daraus, daß der Log. für 6193 = 3,79190 beträgt; mithin fehlt an der Richtigkeit nur ein ſehr kleiner Bruch.

Es ſoll zu dem Log. 5,63875 die Zahl geſucht werden. Wir nehmen ſtatt deſſelben 3,63875. Zu dieſem finden wir in den Tafeln als nächſten Log. 3,63879 und dazu die Zahl 4353. Zu der Zahl 4354 gehört der Log. 3,63889, mithin kann der Unterſchied in der Zahl nicht 1 betragen.

Wir nehmen daher

Log. 3,63879 dazu die Zahl 4353
" 5,63879 " " " 435300

Die letztere Zahl kann nicht um 100 von der Wahrheit abweichen.

Wenn es auf keine große Genauigkeit ankommt und man doch in Eile gern die Zahl zu einem Log. wissen wollte, die sich in den Tafeln nicht vorfindet, so kann man auch aus der Tafel einen beliebigen Log. mit der ihm zukommenden Zahl nehmen, diesen Log. von dem gegebenen abziehen und zu dem Rest die Zahl suchen. Wir finden alsdann 2 Faktoren der Zahl, zu welcher der Log. gehört.

Log. 5,63875
2,65321, hiezu gehört die Zahl 450
2,98554

Der diesem restirenden Log. am nächsten kommende ist 2,98552; die Zahl dazu ist 967,2. Zum Log. 5,63875 gehört nahe die Zahl 967,3 mal 450 = 435240, welche von der vorigen 435300 um 60 differirt. Nimmt man statt des Log. 298552 den nächsten 2,98556, so finden wir dazu die Zahl 967,3; 967,3 × 450 = 435285, welche Zahl von jener, die auch zu groß angenommen ist, um 15 verschieden ist.

Um aber die Zahl zu einem gegebenen Log, zu welchem sich in den Tafeln die Mantisse nicht genau vorfindet, dennoch möglichst genau ausfindig zu machen, verfährt man wie folgt:

Statt 5,63875 nehmen wir 3,63875.

3,63879 ist der Log., zu der nächst größeren Zahl 4353
3,63869 " " " " " kleinern " 4352
10 = Unterschied d. Log. Unterschied d. Zahl 1

Gegebener Log. 3,63875
Der nächst kleinere Log. 3,63869
6

Nun schließen wir 10 : 6 = 1 : x
0,6; oder

5,63879 ist der Log. zu der nächst größern Zahl 435300
5,63869 " " " " " kleinern " 435200
10 Unterschied d. Log. Unterschied d. Zahl = 100

Gegebener Log. 5,63875
Der nächst kleinere Log. 5,63869
6

10 : 6 = 100 : x
x = 60, also ist die Zahl zu dem Log. 5,63875 = 435200 + 60 = 435260

Oder nach der ersteren Berechnung:

zu 3,63869 gehört die Zahl 4352
zu 3,63875 " " 4352,6
zu 5,63875 " " 435260.

Soll man zu einem kleinen Log. dessen Mantisse sich in den Tafeln nicht genau findet, die Zahl suchen, so vermehre man die Kennziffer,

Digitized by Google

ſuche zu dieſem vergrößerten Log. die Zahl und bringe dieſelbe nach vorhin angezeigten Weiſe auf ihren wahren Werth. Je größer der L rithmus angenommen wird, deſto genauer finden wir die Zahl. Beiſ Es wird die Zahl zu dem Log. 0,30743 verlangt; in den Tafeln fi wir dieſen Log. nicht; fügen wir aber die Kennziffer 2 hinzu, ſo fi wir bei der Zahl 100 auch die Mantiſſe genau; alſo:

Log. 2,03743 109 die Zahl
» 0,03743 1,09 » »

Statt des Log. 1,24329, der ſich in der Tafel nicht findet, ne man 3,24329.

Log. 3,24329 hat zur Zahl 1751
» 2,24329 » » » 175,1
» 1,24329 » » » 17,51

Der nächſt kleinere Log. zu 1,24329 iſt 1,23045 mit der Zahl der nächſtgrößere = 1,25527 mit der Zahl 18. Jene Zahl iſt zu k dieſe iſt zu groß. Der nächſt kleinere Log. war von dem gegebenen 0,01284 und der nächſt größere von dem gegebenen um 0,01198 ſchieden. Daraus läßt ſich ſchließen, daß der wahre Werth näher be als bei 17 ſteht. Daß dieſe Verſchiedenheit aber ſehr wenig betra muß, iſt an dem geringen Unterſchiede jener Log. zu erſehen (= 0,000 Es war demnach voraus zu ſehen, daß man auf jeden Fall wenig fe würde, wenn man die Zahl zu $17\frac{1}{2}$ oder 1,75 = 1750 annähme. obige Berechnung gibt 17,51, alſo 0,01 mehr.

§. 218. Der Logarithmus von 1 iſt 0, folglich muß der Logarith von jeder Zahl, die kleiner iſt als 1, mithin von jedem ächten Br noch weniger als 0, d. i. negativ ſein. Alle Zahlen über 1 ha poſitive und unter 1 negative Logarithmen.

Zahl 10000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00
Log. 4; 3; 2; 1: 0; —1; —2; —3; —4;

Jeder Bruch iſt als eine Diviſionsaufgabe anzuſehen, in welcher Zähler den Dividend, der Nenner den Diviſor und der Bruch ſelbſt Quotient vorſtellt. Man findet daher den Log. eines Bruchs, wenn d den Log. des Nenners von dem Log. des Zählers ſubtrahirt. Z. B. wird der Log. von $\frac{4}{5}$ geſucht.

Log. von 4 = 0,60206
» » 5 = 0,69897

zum Log. — 0,09691 gehört die Zahl $\frac{4}{5}$.

Da hier die untere Zahl größer iſt als die obere, ſo ſubtrahiren dieſe von jener und ſetzen vor den Reſt das Minuszeichen (—). Gemei lich drückt man aber alle gewöhnliche Brüche in Decimalbrüchen a da dann die eigentliche Operation des Subtrahirens wegfällt. Z. $\frac{4}{5}$ = 0,8.

Zu der Zahl 9 gehört der Log. 0,90309
» » » 10 » » » 1,00000

Der Log. von 0,8 iſt daher 0,90309 — 1.

Es wird der Log. von $^7/_8$ gesucht; $^7/_8 = 0{,}875$; der Log. von 875 = 2,94201, von 1000 = 3, also ist der Log. von 0,875 = 2,94201 — 3.

Eben so verfährt man, wenn der Log. von einer gemischten Zahl gefunden werden soll. Z. B. Welches ist der Log. $67^2/_3$? $67^2/_3 = 67{,}66 = {}^{6766}/_{100}$; Log. von 6766 = 3,83033, von 100 = 2; der Log. von 67,66 ist also = 3,83033 — 2 = 1,83033.

§. 219. Wie man mit Hülfe der Logarithmen die Operationen des Multiplicirens und Dividirens, des Erhebens (Potenzirens) und Wurzelausziehens bewerkstelligt, haben wir bereits gesehen. Der weitere Gebrauch der Logarithmen in Aufgaben der Regeldetri, Kettenrechnung u. s. w. kann nun keine Schwierigkeit mehr haben. Indeß mögen doch einige Beispiele zeigen, wie man dabei verfahren muß.

1. Beispiel. 5 Cntr. thun an Fracht von A bis B $7^1/_2$ Thl.; wie viel wird demnach die Fracht für $12^1/_2$ Cntr. von A bis B betragen. (1. Uebungsbuch.)

Ansatz. 5 Cntr. : $12^1/_2$ Cntr. = $7^1/_2$ Thl. : x

= 10 : 25 = 7,5 : x

Log. von 7,5 = 0,87506
" " 25 = 1,39794

Log. von 7,5 × 25 = 2,27300
" " 10 = 1,00000

1,27300

Zum Log. von 3,27300 gehört die Zahl 1875
" " 1,27300 " " " 18,75

Antw. 18,75 oder $18^3/_4$ Thl.

2. Beispiel. Jemand kauft für $271^1/_4$ Thl. 9 Stück Tuch, jedes Stück enthält 75 Ellen; wie theuer sind davon 100 Ellen?

Ansatz. 75 mal 9 Ell. : 100 Ell. = $271^1/_4$ Thl. : x

675 : 100 = $271^1/_4$: x

675 : 100 = 271,25 : x

Log. von 271,25 = 2,43337
" " 100 = 2,00000

Log. von 271,25 × 100 = 27125 = 4,43337
" " 675 = 2,82930

1,60407

Zum Log. 4,60407 gehört die Zahl 40186
" " 1,60407 " " " 40,186

40,186 Thl. = 40 Thl. 5 Sgr. und bein. 7 Pf.

3. Beispiel. A kauft von B 1000 Pfd. Waare, die Tara beträgt $6^2/_3$ proc., das Gutgewicht 1 proc.; der Ctnr. von 100 Pfund kostet $22^1/_2$ Thl.; die Kosten betragen $4^4/_5$ proc.; wie viel kostet diese Waare? (Siehe S. 113 Aufg. 2.)

? : 1000 Pfd.		? : 1000	
100 : 93 1/3 für Tara		300 : 280	
100 : 99 für Gutgew.	=	100 : 99	
100 : 22 1/2 Thl.		200 : 45	
100 : 104 4/5 für Kosten		500 : 524	

Log. von	300	= 2,47712	Log. von	1000	= 3,00000
„ „	100	= 2,00000	„ „	280	= 2,44716
„ „	200	= 2,30103	„ „	99	= 1,99564
„ „	500	= 2,69897	„ „	45	= 1,65332
		9,47712	„ „	524	= 2,71939
					11,81533
				—	9,47712
					2,33821

Zum Log. 4,33822 gehört die Zahl 21788 (Vega)
„ „ 2,33822 „ „ „ 217,88

Die Waare kostet 217,88 Thl. = 217 Thl. 26 Sgr. 5 Pf.

Anmerkung. Bei weitläufigen Berechnungen gewähren die Log. mehr Kürz und Sicherheit, als das gewöhnliche Verfahren. Mehr Aufgaben zur Uebun im Rechnen mit Logarithmen enthält unser drittes Uebungsbuch, in welche sich auch log. Tafeln befinden.

Zum Schluß noch folgende Aufgabe:

4. Beispiel. Auf welche Potenz muß 11 erhoben werden, dam deren Werth 289 ausmacht?

Aufl. $11^x = 289$

x. Log. $11 =$ Log. 289

$x = \frac{\text{Log. } 289}{\text{Log. } 11}$

Log. 289 = 2,46090 = 236309.
Log. 11 = 1,04139

Also: $11^{2,36309} = 289$

Probe. Log. 11 = 1,04139
2,36309 mult.

2,46089829 . . also fe
nahe 2,46090 zu 289 gehörig

Sechs und zwanzigster Abschnitt.

Einiges über Versetzungen (Permutationen) Verbi dungen (Complexionen oder Combinationen) und mathematische Wahrscheinlichkeit und Möglichkeit.

Vorbemerkung. Hier berühren wir ein arithmetisches Kapitel, welches wenigen Lehrbüchern der praktischen Rechenkunst vorkommt. Es enthält freil auch wenig Fälle, welche in das bürgerliche Leben einschlagen, gewährt ab deßungeachtet Interesse und Vortheil genug, um auch den bloß praktisch Rechner zu bestimmen, sich in etwas damit bekannt zu machen. In manch mechanischen Kunstsachen, in Fabriken, — z. B. alle mögliche Abwechselu verschiedener Farben anzubringen — könnte dasselbe noch wol seine Anwe dung finden. Beim Würfelspiel, Lottospiel und andern Glücksspielen wür man den großen Unterschied in der Wahrscheinlichkeit des Gewinnstes od Verlustes deutlich einsehen und sich nicht so leicht zum Spiele verleiten lasse

Wenn die Erfahrung richtig ist, daß im Durchschnitt von 50 Gewittern Eins einschlägt und bei 50 einschlagenden Gewittern ein Mensch getödtet wird, so wird vielleicht meine Furcht bei einem nahen Gewitter vermindert werden, wenn ich bedenke, daß die Wahrscheinlichkeit, vom Blitze getroffen zu werden, sich wie 1 zu 2500 verhält. Doch wer wird beim Erlernen einer Wissenschaft gleich nach einem äußern irdischen Vortheile fragen? Ist die Wissenschaft für den Lernenden selbst nicht anziehend, hat sie an sich keinen innern Reiz, so werden alle äußern Reize des Vortheils für das gründliche Studium von geringem Belang sein.

§. 220. Bei den räumlichen Veränderungen verschiedener Dinge, z. B. abcd können wir drei Hauptfälle unterscheiden: 1) Permutation oder Versetzung jedes einzelnen Dinges: abcd, acbd, adbc, bacd, bcad, bdac u. s. w. 2) Combination oder Verbindung zu zweien, dreien u. s. w. z. B. ab, ac, ad, bc, bd, cd; abc, bcd u. s. w. Variation oder Versetzung und Verbindung zugleich. z. B.

ab, ba, ca, da.
ac, bc, cb, db.
ad, bd, cd, dc.

§. 221. Unter Permutation versteht man besonders solche Lokal-Veränderungen verschiedener Dinge, nach welchen jedes einzelne Ding alle mögliche Lagen gegen die übrigen Dinge einnimmt. Die Dinge selbst werden hier Elemente genannt. Die Bezeichnung dieser Elemente geschieht durch Ziffern oder durch Buchstaben.

1 Element = a kann keine Versetzung geben.

Bei 2 Elementen = ab können 2 Versetzungen Statt finden, ab, ba = 1 . 2; bei der ersten steht a vorn und b hinten, bei der zweiten steht b vorn und a hinten.

Bei 3 Elementen = abc, kann das dritte Element c in jeder der beiden vorigen Versetzungen vorn, mitten und hinten stehen. 1) cab, acb, abc, 2) cba, bca, bac. Drei Elemente geben also 6 Versetzungen = 1 . 2 . 3.

Bei 4 Elementen abcd, kann das vierte = d bei den 6 vorigen Versetzungen eine vierfache Stellung einnehmen, nämlich die erste, zweite, dritte und vierte.

dcab	dacb	dabc	dcba	dbca	dbac
cdab	adcb	adbc	cdba	bdca	bdac
cadb	acdb	abdc	cbda	bcda	badc
cabd	acbd	abcd	cbad	bcad	bacd

oder so geordnet, daß jedes Element 6 mal jede Stelle einnimmt.

1) abcd, 2) acbd, 3) acdb 4) abdc, 5) adbc, 6) adcb
1) bacd, 2) bcad, 3) bdac 4) bcda, 5) badc, 6) bdca u. s. w. gibt 4 . 6 = 1 . 2 . 3 . 4 = 24 Versetzungen.

Ueberhaupt: 1 Element gibt . . . . . 0 Versetzungen
2 Elemente geben . . . 1 . 2 = 2 „
3 „ „ 1 . 2 . 3 = 6 „
4 „ „ 1 . 2 . 3 . 4 = 24 „
5 „ „ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120 „
n „ „ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 ... (n − 1) n „

Daraus ergibt sich die Regel: Um die Anzahl der Versetzungen

gegebener Elemente zu finden, multiplicire man die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an bis zu der Anzahl der Elemente.

Sind zwei oder mehr Elemente einander gleich, so werden natürlich der Versetzungen weniger.

aa gibt nur eine Versetzung, also die Hälfte von ab oder . . . . . = $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$

Nimmt man noch ein drittes verschiedenes Element hinzu, so hat man aab, aba, baa, also 3 Versetzungen . . . . . = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$

Wird noch ein viertes verschiedenes Element hinzugesetzt, so gibt dieß 12 Versetzungen . . = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$

Ein fünftes verschiedenes Element gibt damit 60 Versetzungen . . . . . = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$

3 gleiche Elemente aaa geben nur 1 Versetzung, oder eigentlich 1 Stellung . . . . . = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$

Ein viertes verschiedenes Element b gibt aaab, aaba, abaa, baaa = 4 Versetzungen = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$

Ein fünftes verschiedenes Element hinzugesetzt, gibt 20 Versetzungen . . . . . = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$

u. s. w.

Anmerkung. Genau genommen müßte man immer eine Versetzung weniger, dagegen Eine Position oder Stellung rechnen. Was man erste Versetzung nennt, ist eigentlich keine Versetzung, sondern eine Setzung oder Stellung. Da aber diese Unterscheidung die Sache ohne Noth schwieriger machen würde, so ist es besser, bei der einmal angenommenen Benennung zu bleiben.

§. 222. Aufgaben.

1) Wie oft können 10 Personen ihre Plätze wechseln, und wie viel Zeit gehört dazu, wenn zu jeder Verwechselung 5 Sekunden gerechnet werden?

   Aufl. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$ Versetzungen, zu welchen 420 Tage, zu 12 Stunden gerechnet, erforderlich wären; 12 Personen würden dazu 151 Jahre 325 Tage brauchen.

2) Wie oft lassen sich die Buchstaben in dem Worte a) Cäsar, b) Eis, versetzen?

   Aufl. Das Wort Cäsar enthält 5 Buchstaben, diese geben $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Versetzungen:

   Eis enthält 3 Buchstaben, daher sind $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ Versetzungen möglich, nämlich 1. Eis, 2. Esi, 3. ies, 4. ise, 5. sie, 6. sei.

3) Stelle alle Versetzungen dar, welche sich aus dem Worte Auge bilden lassen!

4) Das Wort „Elberfeld" hat 9 Buchstaben, unter welchen der Buchstabe e 3mal und l 2mal vorkommt; die

Anzahl der Versetzungen ist daher: $= \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.1.2.3}$

$= 30240.$

Anmerkung. Schon oft ist die Frage aufgeworfen worden, wie viel Variationen der Töne auf einem Klavier zu machen seien, mit welchen dann zugleich alle mögliche Kompositionen erschöpft wären. Viele glauben irriger Weise, diese Frage auf die Weise lösen zu können, daß sie die möglichen Versetzungen der Töne — etwa 42 — berechnen. Dieß würde allerdings ein so ungeheures Zahlengebirge geben, daß die Freunde der Tonkunst in den ersten tausend Millionen Jahren keine Erschöpfung zu befürchten hätten, da 24 Töne schon über 60000 Trillionen Versetzungen möglich machen. Um aber vollends alle Besorgnisse zu beseitigen, fügen wir noch einige Elemente hinzu, welche diese musikalischen Variationen so überschwenglich mannigfaltig machen, daß alle musikalische Wesen im Himmel und auf Erden an der Vollendung einer solchen Arbeit verzweifeln möchten. Diese neuen Elemente sind: die Taktarten und die verschiedene Geltung der Noten.

§. 223. Die Combination lehrt die gegebenen Elemente in Gruppen einer bestimmten gleichen Anzahl Elemente zu verbinden. Diese Gruppen oder Verbindungen haben, nach der verschiedenen Anzahl von Elementen, auch verschiedene Namen. Ein einziges Element heißt eine Union.

Eine Verbindung von 2 Elementen heißt eine Ambe oder Binion
" " " 3 " " " Terne oder Ternion
" " " 4 " " " Quaterne oder Quaternion.
" " " 5 " " " Quinte oder Quinion.

2 Elemente a b bilden in ihrer Verbindung 1 Ambe. Da aber jedes Element zwei Stellen in der Ambe einnehmen kann, so erhalten wir durch Versetzung 2 Amben, nämlich a b und b a. Diese letztere Ambe b a enthält kein neues Element; sie unterscheidet sich von a b nur durch die Stellung der Elemente und kann deshalb als eine Wiederholung von a b angesehen werden. Wird eine Verbindung verschiedener Elemente gefordert, so muß dabei bemerkt werden, ob diese mit oder ohne Wiederholung Statt finden soll.

2 Elemente bilden also 1 Ambe $= \frac{2.1}{1.2}$ oder $\frac{2.(2-1)}{1.2.}$

o. W. (ohne Wiederholung). Tritt noch ein drittes Element c hinzu, so kann dieses mit jedem der übrigen Elemente eine Ambe bilden.

ab, ac, bc $= \frac{3.2}{1.2}$ oder $\frac{3.(3-1)}{1.2}$ Amben.

3 Elemente abc bilden 1 Terne o. W. $= \frac{3.2.1}{1.2.3}$ oder

$\frac{3.(3-1).(3-2)}{1.2.3}$. Ein viertes Element d bildet mit jedem der drei gegebenen Elemente eine neue Terne, also im Ganzen 4 Ternen.

1) abc, 2) abd, 3) acd, 4) bcd o. W. $= \frac{4.3.2}{1.2.3}$ oder

$\frac{4.(4-1).(4-2)}{1.2.3}$.

4 Elemente abcd geben eine Quaterne $= \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$ oder $\frac{4.(4-1).(4-2).(4-3)}{1.2.3.4}$; tritt aber ein fünftes Element e so bildet dieſes mit jedem der gegebenen Elemente eine neue Qu nämlich abcd, abce, bcde, cdea, deca $= \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$ oder $\frac{5.(5-1).(5-2).(5-3)}{1.2.3.4} = 5$ Quaternen.

5 Elemente a b c d e bilden eine Quinterne oder 1 Quinion man noch ein neues Element f hinzu, ſo bildet dieſes mit jede übrigen Elemente eine neue Quinterne, alſo im Ganzen 6 Quint nämlich: 1) fbcde, 2) bcdef, 3) cdefa, 4) defab, 5) efa $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}$ oder $\frac{6.(6-1).(6-2).(6-3).(6-4)}{1.2.3.4.5} = 6$ Quint

Anmerkung. Nennt man die Anzahl der Elemente n, ſo bilden dieſe n gegebenen Darſtellung:

$\frac{n.(n-1)}{1.2}$ Amben o. B

$\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$ Ternen o. B

$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}$ Quaternen

$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}$ Quinternen

§. 224. Die regelmäßige Zu- und Abnahme der Elemente b auch eine regelmäßige Reihe von Verbindungen.

A.

1 Element gibt	0		Ambe
2 Elem. geben	$\frac{2.1}{1.2}$	= 1	Ambe
3 „ „	$\frac{3.2}{1.2}$	= 3	Amben
4 „ „	$\frac{4.3}{1.2}$	= 6	„
5 „ „	$\frac{5.4}{1.2}$	= 10	„
6 „ „	$\frac{6.5}{1.2}$	= 15	„
7 „ „	$\frac{7.6}{1.2}$	= 21	„
8 „ „	$\frac{8.7}{1.2}$	= 28	„

u. ſ. w.

B.

1 Element gibt	0		Ter
2 Elem. geben	0		Ter
3 „ „	$\frac{3.2.1}{1.2.3}$	= 1	
4 „ „	$\frac{4.3.2}{1.2.3}$	= 4	
5 „ „	$\frac{5.4.3}{1.2.3}$	= 10	
6 „ „	$\frac{6.5.4}{1.2.3}$	= 20	
7 „ „	$\frac{7.6.5}{1.2.3}$	= 35	
8 „ „	$\frac{8.7.6}{1.2.3}$	= 56	

u. ſ. w.

C.		D.	
1, 2, 3 Elemente geben 0 Quaternen.		1, 2, 3, 4 Elem. bilden 0 Quinternen	
4 Elem. geb.	$\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1$ Quat.	5 Elem. geb.	$\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1$ Quint.
5 „ „	$\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$ „	6 „ „	$\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6$ „
6 „ „	$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ „	7 „ „	$\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} = 21$ „
7 „ „	$\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35$ „	8 „ „	$\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56$ „
8 „ „	$\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$ „	9 „ „	$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126$ „
9 „ „	$\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126$ „	10 „ „	$\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$ „
10 „ „	$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210$ „		u. s. w.
u. s. w.			

Die Vergleichung der gegebenen Elemente mit der Anzahl der daraus sich ergebenden Verbindungen gibt interessante Resultate.

A. für die Amben.

a. Reihe der Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . .
b. „ „ Amben 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 . . . .
c. Differenzreihe d. Amb. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . .

Die Reihe b kann nun auch durch die Reihe c, welche eine arithmetische Progression bildet, bestimmt werden. Die Anzahl der Glieder in der Reihe c ist immer 1 weniger als die Anzahl der damit korrespondirenden Elemente. Jedes Glied der Ambenreihe entsteht durch die Summirung der vorhergehenden Differenzen. Z. B. Es wird die Anzahl der Amben gesucht, welche sich aus 8 Elementen bilden lassen. Die vorhergehenden Differenzen sind 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1, deren Summe $= (7 + 1)\ 3^1/_2 = 28$. (Siehe arithm. Progr.) 10 Elemente geben $(9 + 1)\ 4^1/_2 = 45$ Amben.

B für die Ternen.

d. Reihe der Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . .
e. „ „ Ternen 0, 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56 . . . .
f. Differenzreihe d. Ternen 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21 . . . .
g. Differenzen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .

Auch hier regelmäßige Fortschreitung. Die Reihe g steht senkrecht unter der Reihe d und die korrespondirenden Glieder derselben sind um 1 unterschieden. Jedes Glied der Reihe f ist gleich der Summe der ihm vorhergehenden Differenzen in der Reihe g. Z. B. 21 in der Reihe f $= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = (6 + 1)\ 3 = 21$. Die Anzahl der Ternen in der Reihe e ist gleich der Summe der vorhergehenden Differenzen in der Reihe f. Z. B. 35 Ternen $= 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$. Die Differenz der Glieder in der Reihe f nimmt mit jedem Gliede

um 1 zu. Bei 8 Elementen war das letzte Glied der Reihe f = 15 + (8 − 2) = 21; bei 9 Elementen wird das letzte Glied dieser Reihe sein = 21 + (9 − 2) = 28. Die Anzahl der Ternen aus 9 Elementen ist davon 56 + 28 = 84.

C für die Quaternen.

h. Reihe der Elemente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i. : : Quaternen	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210
k. Differenzreihe von i		0	0	1	4	10	20	35	56	84
l. : : k			0	1	3	6	10	15	21	28
m. : : l				1	2	3	4	5	6	7

Jedes Glied der Reihe l ist gleich der Summe der ihm in der Reihe m vorhergehenden Glieder; eben so kann jedes Glied der Reihen i und k dargestellt werden.

D für die Quinternen.

n. Reihe der Elemente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
o. : : :	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
p. Differenz der Reihe o		0	0	0	1	5	15	35	70	126
q. : : : p			0	0	1	4	10	20	35	56
r : : : q				0	1	3	6	10	15	21
s : : : r					1	2	3	4	5	6

Auch hier können die Reihen o, p, q, r, s von unten herauf auf die vorige Weise konstruirt werden. Merkenswerth ist es noch, daß die Ambenreihe in A, die Differenzreihe der Ternen in B, die zweite Differenzreihe l der Quaternen in C und die dritte Differenzreihe r der Quaternen in D völlig übereinstimmen. Eben so ist die Ternenreihe in B gleich der ersten Differenzreihe k der Quaternen in C und der zweiten Differenzreihe q der Quinternen in D. Eben so finden wir die Quaternenreihe i in der ersten Differenzreihe q der Quinternen wieder.

Anmerkung. Ueberall Gesetz! Der Lehrer benutze diese Gelegenheit, den Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß die Produkte der geistigen Natur ebensowohl festen Bildungsgesetzen unterworfen sind, als die Produkte der materiellen Natur; daß aber sowol dort als hier nur dem aufmerksamen Blicke diese Gesetze klar werden. Solche Bemerkungen werden nicht verfehlen, dem Schüler Achtung vor Wissenschaft und Kunst einzuflößen. Ein großer Gewinn, selbst dann, wenn auch die Praxis dabei leer ausgehen sollte.

§. 225. Einige praktische Aufgaben.

5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich auf eine von mir besetzte Nummer im Lottospiel gewinnen werde?

Im Lotto sind 90 Nummern, von welchen an dem Ziehungstage jedesmal 5 Zahlen gezogen werden. Man kann auf einzelne Nummern, auf Amben, Ternen und in einigen Ländern auch auf Quaternen und Quinten einsetzen, höher aber nicht, weil nicht mehr als 5 Nummern gezogen werden. Wenn ich nun auf eine Nummer einsetze, so ist es möglich, daß diese sich unter den 5 Nummern, welche gezogen werden, befindet 90 Nummern = 18 mal 5; es kann also 17 mal gezogen werden mit Verlust für mich und nur 1 mal mit Gewinn, daher die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes für mich nur 1 mal mit Gewinn, daher die Wahrscheinlichkeit des Ge-

winnes für mich = $^1/_{18}$; bei 2 Nummern ist diese Wahrscheinlichkeit $^2/_{18}$, bei 3 Nummern $^3/_{18} = ^1/_6$ u. s. w.

6) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werde ich im Lotto eine von mir besetzte a) Ambe, b) Terne, c) Quaterne, d) Quinterne gewinnen?

Hier müssen wir uns zuerst Folgendes merken:

Die 90 Nummern im Lottospiel geben

$$\frac{90 \cdot 89}{2} = 4005 \text{ Amben},$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480 \text{ Ternen},$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190 \text{ Quaternen},$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268 \text{ Quinen}.$$

Es ist klar, daß die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, mit Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen oder Quinen immer mehr abnimmt. Dagegen nimmt aber in den Lottospielen die Größe des Gewinns in dieser Folge zu. In Berlin gewinnt eine einzelne Nummer den 15fachen Einsatz, eine gewinnende Ambe den 270fachen, eine Terne den 5300fachen, eine Quaterne den 60000fachen Einsatz. Dieß ist aber nicht bei allen Lotterien gleich.

Besetzt nun ein Spieler eine Ambe, etwa 65 und 66, so ist die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen oder zu verlieren, folgende:

90 Nummern geben 4005 Amben.

Die 5 gezogenen Nummern geben 10 Amben $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$

Von den 4005 Amb. wird also nur $^{10}/_{4005}$ oder der 400ste Theil gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, mit 1 Ambe zu gewinnen, ist daher $^1/_{400}$, mit 2 Amb. $^2/_{400}$, mit 3 Amb. $^3/_{400}$, mit 4 Amb. $^4/_{400} = ^1/_{100}$.

90 Nummern geben 117480 Ternen.

Bei der Ziehung kommen also von 117480 Ternen nur 10, also $^1/_{11748}$ heraus, welcher Bruch die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens bezeichnet. Es könnte daher jemand mehr als 11000 gegen 1 wetten, daß meine besetzte Terne nicht gewinnen wird.

90 Nummern geben 2555190 Quaternen.

Die 5 gezogenen Nummern geben 5 Quaternen.

1 besetzte Quaterne gibt also $^5/_{2555190} = ^1/_{511038}$ Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.

Ebenso ergibt sich für eine besetzte Quine nur $^1/_{43949268}$ Wahrscheinlichkeit; die Gewißheit, zu gewinnen, würde also die Besetzung von 43949268 Quinen erfordern.

7) a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein und derselbe Kartenspieler dieselben Karten zweimal hintereinander erhält, wenn der Kartenstock 32 Blätter zählt? b. Wie viel Spiele gehören dazu, um mit Gewißheit dieselben Karten wieder zu erhalten? c. Wie viel Zeit würde erforderlich sein, wenn auf jedes Spiel 2 Minuten und der

Digitized by Google

„Durch die Parlamentsakte vom 17. Juni 1824 wurde eigentlich kein neues Maß und Gewicht in England eingeführt, sondern das bisherige nur genauer bestimmt und zum Theil vereinfacht. Die Grundeinheit, von welcher alle Maße und auch das Gewicht abgeleitet werden, ist das Yard, dessen Länge durch das Verhältniß bestimmt ist, welches dasselbe zu dem Pendel hat, das in London Sekunden mittlerer Zeit schwingt. Auf diese Art an die ewigen Gesetze der Natur selbst gebunden, ist es nun ein Leichtes, dieses Grundmaß zu jeder Zeit prüfen oder richtig wiederherstellen zu können, falls das Original einmal beschädigt werden oder verloren gehen sollte.

Das Original des Längenmaßes ist das messingene von Bird verfertigte Yard, das sich jetzt in Verwahrung des Clerks vom Hause der Gemeinen befindet, und worauf eingegraben ist: „Standard Yard 1760". Die gerade Linie zwischen den Mittelpunkten der zwei Punkte auf den goldenen Nägeln dieses messingenen Stabes ist zur gesetzlichen Länge des Yards erklärt, wenn das Messing die Temperatur von 62 Grad des Fahrenheit'schen Thermometers (= 13½ Grad Réaumur) hat. Dieses Original-Längenmaß heißt „das Imperial Standard Yard". Dasselbe verhält sich zu einem Pendel, welches Sekunden mittlerer Sonnenzeit in der Breite von London im luftleeren Raum an der Oberfläche des Meeres schwingt, wie 36 Zoll zu 39,1393 Zoll."

Wir wollen nun von den wichtigsten europäischen Ländern die Maße und Gewichte mittheilen, wobei wir vorzüglich die neueste Auflage (1830) des vortrefflichen, mit der gewissenhaftesten Sorgfalt und Genauigkeit bearbeiteten Werks von Chelius: „Maß und Gewichtsbuch", nach dem Tode des Verfassers von Hauschild herausgegeben, benutzen. Wir beobachten dabei folgende Ordnung: 1) Längenmaß, 2) Flächenmaß, 3) Raummaß, 4) Gewichte. Ueber Münzen werden wir dann noch ein besonderes Verzeichniß folgen lassen. —

Baden, Großherzogthum.

Längenmaß. 1 Ruthe hat 10 Fuß, 1 Fuß = 10 Zoll, 1 Zoll = 10 Linien; 1 Elle hat 2 Fuß oder 265,98 oder sehr nahe 266 Pariser Linien.

Flächenmaß. 1 Quadratruthe = 100 Quadratfuß, jeden zu 100 Quadratzoll; der Morgen enthält 400 Quadratruthen oder 4 Viertel.

Raummaß. a) für Flüssigkeiten. 1 Ohm hat 10 Stützen oder 100 Maß; 1 Maß = 75,618 pariser Kubikzoll, hält 1½ Liter, daher die Stütze 15 Liter, die Ohm 150 Liter, das Fuder 1500 Liter. 2 Ohm = 3 Hektoliter.

b) Für Getreide. 1 Malter hat 1½ Hektoliter 10 Sester oder 100 Meslein, 1 Meslein = 75,6186 pariser Kubikzoll oder 1½ Liter, daher das Malter 150 Liter oder 7562 pariser Kubikzoll.

Gewicht. 1 Centner = 10 Stein = 100 Pfund = 1000 Zehnling,